М.Ю. Ромашка

Равносильные, допустимые и недопустимые преобразования уравнений и отдельных выражений

Автор надеется, что эта статья поможет Вам избежать досадных ошибок при решении уравнений и неравенств различных типов. Как показывает, например, практика ЕГЭ, даже сильные школьники иногда совершают досадные ошибки, выполняя неравносильные преобразования при решении уравнений и неравенств, теряя при этом корни или приобретая лишние.

На просторах нашей необъятной страны есть множество самых разных школ. В некоторых школах математику преподают очень хорошо, и их выпускники могут по праву гордиться тем, что получили математическое образование высшей пробы (в рамках школьной программы). Однако, есть, к сожалению, и другие школы, где математику преподают средне, или даже, скажем мягко, «очень средне». Там не менее, в самых разных уголках нашей родины, даже там, где практически невозможно найти хорошую математическую школу, иногда рождаются талантливые и одарённые дети. Я расскажу Вам историю о девушке из глубинки, которую природа одарила незаурядными математическими способностями. Несмотря на то, что эта история – вымышленная, я надеюсь, что она станет для Вас поучительной.

Девушку звали Лукерья. Родители дали её это красивое, незаслуженно забытое в наши дни, имя. С детства она, не в пример другим девчонкам, интересовалась математикой и естественными науками. Но в том месте, где она родилась, уровень преподавания этих наук оставлял желать лучшего. Когда Лукерья была ещё маленькой, её родители ещё не задумывались об этом. А может быть, они просто ещё не успели заметить и оценить талант своей дочери. Лукерья пошла в первый класс в обычную школу, не хорошую и не плохую, среднюю общеобразовательную школу своего города.

В школе способности девочки стали замечать. Лукерья щёлкала задачки лучше всех мальчишек своего класса, не говоря уже про девчонок. Родители радовались успехам своей дочери и ещё не подозревали, что некоторые трудности поджидают её впереди. Её учителя были добродушными и любили её. Но когда дело подошло ближе к ГИА (именуемой также ОГЭ), выяснилось, что некоторые задания не могут решить сами учителя. Задания с модулями и с параметрами вызывали у них благоговейный трепет, а о том, что дальше, после 9 класса, лучше вообще умолчать. Учителя признались, что не смогут дать ей образование, соответствующее её способностям. Было решено отправить Лукерью учиться в другой город, в школу-интернат для одарённых детей. Перед поездкой Лукерья успела прочитать учебники по математике до конца 11 класса, чтобы хотя бы бегло ознакомиться со всей школьной программой.

В интернате Лукерью встретил седой профессор. И, конечно же, он решил протестировать знания и способности, имевшиеся у девочки к тому моменту. Первое, что он ей дал – маленький заурядный на первый взгляд листочек с уравнениями.

Решите уравнение:

1. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x-6}{x-3}=0$

2. $\sqrt{x+4}=-x-2$

3. $\sin\left(x^2+2x\right)=\sin(x+2)$

4. $\log_2(\mathrm{x}-6)^2+2\log_2(4-\mathrm{x})=0$

5. $-\log_9(x+3)^2=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\frac{x+5}{x+3}$

Давайте внимательно проследим за ходом мысли Лукерьи при выполнении этого задания.

Уравнение 1. Лукерья быстро заметила, что в числителе второй дроби можно вынести общий множитель (двойку) за скобки. Получается:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-3)}{x-3}=0$$

И тогда вторую дробь можно сократить на $x-3$:

$$\frac{x+1}{x-1}-2=0$$

Теперь перенесём двойку в правую часть уравнения и умножим обе части уравнения на $x-1$. Получится:

$$x+1=2(x-1)$$

Осталось раскрыть скобки справа и решить обычное линейное уравнение. Получается корень $x=3$, и Лукерья записывает **ответ: 3.**

Уравнение 2. $\sqrt{x+4}=-x-2$

Здесь Лукерья вспомнила такое важное понятие, как ОДЗ: область допустимых значений переменной. По-видимому, она волновалась при встрече с профессором, поэтому вспомнила об этом не сразу. Но теперь вспомнила: в одной из книг, которые она читала самостоятельно, говорилось, что, прежде, чем решать уравнение, желательно самым первым шагом найти ОДЗ, т.е. область значений переменной, при которых определена и левая, и правая часть уравнения. Очень полезно начинать решение уравнения или неравенства с нахождения ОДЗ, если это возможно и не сопряжено с какими-то слишком большими трудностями. Может оказаться так, что ОДЗ – пустое множество, и тогда сразу ясно, что корней нет. В данном случае найти ОДЗ было просто: подкоренное выражение должно быть неотрицательно. И Лукерья записывает **ОДЗ:** $x\geq -4$.

Теперь Лукерья решила возвести обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от корня. У неё получилось:

$$x+4=x^2+4x+4;$$

$$x^2+3x=0.$$

Это – неполное квадратное уравнение. Его не надо решать через дискриминант, ведь можно сделать гораздо проще, и Лукерья это знала. Выносим общий множитель за скобки:

$$x(x+3)=0$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а все остальные определены – этому её в школе научили. Поэтому сразу получаем два корня: $x=0$ и $x=-3$. Теперь Лукерья проверяет, попадают ли эти корни в ОДЗ. Оказывается, что оба этих корня попадают в ОДЗ. И она записывает **ответ: 0 и –3.**

Уравнение 3. $\sin\left(x^2+2x\right)=\sin(x+2)$

При виде тригонометрического уравнения Лукерья немного заволновалась. Множество тригонометрических формул она ещё не успела хорошо запомнить. Но тут-то вроде бы всё просто. Синус одной функции равен синусу другой функции. Значит, подумала Лукерья, сами эти функции должны быть равны:

$$x^2+2x=x+2$$

Лукерье очень нравилось выносить общий множитель за скобки, и здесь она именно это и сделала:

$$x(x+2)=x+2$$

А дальше ей вдруг подумалось: поделим обе части уравнения на $x+2$. Получается:

$$x=1$$

Да, вот это – ошибка, которую совершают многие школьники. Деление на выражение, содержащее переменную, в общем случае не является равносильным преобразованием! Наверное, Лукерья просто волновалась. Но она спохватилась: интуиция подсказала ей, что что-то здесь не так. Она зачеркнула последнюю строчку, вернулась на строчку выше и перенесла всё в одну сторону:

$$x(x+2)-(x+2)=0;$$

$$(x-1)(x+2)=0.$$

Вот так уже гораздо лучше. У этого уравнения сразу видны два корня: 1 и –2, один из которых она сначала потеряла при неверном действии. Лукерья записывает **ответ: 1 и –2.**

Уравнение 4. $\log_2(\mathrm{x}-6)^2+2\log_2(4-\mathrm{x})=0$

Тут Лукерья очень кстати вспомнила о пользе нахождения ОДЗ в самом начале решения, когда ничего ещё не преобразовано. Найти ОДЗ здесь просто: аргументы логарифмов должны быть строго больше нуля. Имеем:

$$\begin{cases}(x-6)^2>0\\ 4-x>0\end{cases};\qquad \begin{cases}x\neq 6\\ x<4\end{cases}$$

Последняя система равносильна одному лишь нижнему условию, и Лукерья записала: **ОДЗ:** $x<4$.
Далее Лукерья вспомнила формулу сноса степени

$$\log_a b^n = n\log_a b$$

и преобразовала уравнение, снеся двойку в первом члене:

$$2\log_2(x-6)+2\log_2(4-x)=0$$

Теперь можно поделить обе части уравнения на 2. Деление уравнения на число, отличное от нуля – это уж точно равносильное преобразование. Получим:

$$\log_2(x-6)+\log_2(4-x)=0$$

Дальше Лукерья вспоминает: логарифм произведения равен сумме логарифмов. И наоборот: сумма логарифмов равна логарифму произведения. Значит, можно записать:

$$\log_2(x-6)(4-x)=0$$

Отсюда, пользуясь определением логарифма, находим:

$$(x-6)(4-x)=2^0=1$$

Раскрывая скобки и перенося всё в одну сторону, получим квадратное уравнение:

$$x^2-10x+25=0$$

Лукерья сразу заметила, что перед ней – полный квадрат, и не стала считать через дискриминант:

$$(x-5)^2=0$$

$$x=5.$$

Проверяем, принадлежит ли этот корень ОДЗ. Видим – нет, не принадлежит. И Лукерья записывает **ответ: корней нет.**

Уравнение 5. $-\log_9(x+3)^2=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+5}{x+3}$

Лукерья снова начинает решение с нахождения ОДЗ. С этим она легко справляется. Не останавливаясь на подробностях, сразу запишем: **ОДЗ:** $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;+\infty)$. Далее Лукерья вспомнила обобщённую формулу сноса степеней:

$$\log_{a^q} b^p=\frac{p}{q}\log_a b$$

С помощью неё она красиво преобразовала обе части уравнения, приведя все логарифмы к одному основанию:

$$-\log_3(x+3)=\log_3\frac{x+5}{x+3}$$

Теперь преобразуем то, что справа: логарифм частного равен разности логарифмов.

$$-\log_3(x+3)=\log_3(x+5)-\log_3(x+3)$$

Получается совсем простое уравнение:

$$\log_3(x+5)=0$$

$$x+5=1$$

$$x=-4$$

Проверяем, принадлежит ли найденный корень ОДЗ. Нет, не принадлежит; он попал прямо в середину «разрыва» ОДЗ. И Лукерья вновь записывает **ответ: корней нет.**

Профессор, посмотрев работу Лукерьи, сказал: «Ты знаешь, в целом мне твоя работа очень даже нравится. Я думаю, что ты сможешь у нас учиться. И мне кажется, что ты – в начале большого пути. Но твой путь сейчас только начинается. На данный момент все уравнения решены неправильно».

После небольшой паузы профессор предложил девушке разобрать уравнения вместе. Он сказал: «Ошибки, которые ты сделала, делают многие люди. Все ошибки, которые встречаются в твоей работе, можно объединить в одну группу: ты делала неравносильные преобразования, и в результате либо теряла корни, либо приобретала лишние корни». Для начала введём несколько ключевых определений. Мы будем говорить о преобразованиях. И давай сразу введём чёткое различие: бывают преобразования всего уравнения в целом, а бывают преобразования отдельного выражения. Эти вещи путать нельзя! Они – принципиально разные, и скоро, разобрав твою работу, мы убедимся в этом. Я поясню чуть более подробно, что я имею в виду. Когда я говорю о преобразовании всего уравнения в целом, я имею в виду применение какого-то действия к обеим частям уравнения одновременно. Например, обе части уравнения можно умножить или поделить на одно и то же число, отличное от нуля. Можно к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, или, наоборот, отнять. Можно возвести обе части уравнения в квадрат. Можно, наоборот, извлечь квадратный корень из обеих частей уравнения. В общем случае можно применить одну и ту же операцию к обеим частям уравнения. Вот что я называю преобразованием уравнения в целом.

Другой тип преобразований – это преобразования отдельных математических выражений. Например, замена выражения $a^2 - b^2$ выражением $(a-b)(a+b)$. Или замена выражения $\log_a b^n$ выражением $n\log_a b$. Как ты уже, наверное, догадываешься, к различным преобразованиям нужно относиться внимательно. Далеко не все преобразования являются равносильными. Сформулируем определения.

1. Преобразование <u>уравнения</u> называется равносильным, если множества решений (корней) нового и исходного уравнений совпадают.

«Звучит просто», - сказала Лукерья. «Но как же заранее определить, совпадают ли множества решений нового и старого уравнений, или нет»? «К сожалению, универсального и вместе с тем простого ответа на этот вопрос не существует», – ответил профессор. Каждый случай, каждое уравнение и преобразование нужно рассматривать отдельно. Прибавить или отнять число, умножить или поделить обе части уравнения на отличное от нуля число – это равносильные преобразования. Но вот более сложные операции, такие, как, например, возведение обеих частей в квадрат или извлечение корня, требуют большего внимания. Впрочем, когда ты наберёшься опыта, тебе в большинстве случаев не составит труда отличить равносильное преобразование от неравносильного. Пока что сформулируем ещё несколько определений.

2. Преобразование <u>уравнения</u> называется допустимым, если множество решений нового уравнения включает в себя множество решений исходного уравнения. Иными словами, множество решений может расшириться, могут появиться «лишние» корни, которые не являются корнями исходного уравнения. Например, возведение обеих частей в квадрат во втором уравнении было допустимым, но не равносильным преобразованием. Однако, вовсе не обязательно, что лишние корни появятся. Это зависит от конкретного уравнения. И, для полноты системы определений, введём ещё одно определение, связанное с преобразованием уравнений.

3. Преобразование <u>уравнения</u> называется «недопустимым», если множество решений нового уравнения является подмножеством множества решений исходного уравнения. Иными словами, множество решений может сузиться, может произойти потеря корней. В частности, может произойти так, что потеряются все корни, и множество решений нового уравнения будет пустым (напомним, что пустое множество является подмножеством любого множества). Но может быть, что потеряются не все корни. В некоторых задачах может возникать такая ситуация, что некоторые корни теряются, но именно интересующие в данной задаче корни остаются. В таких случаях, как это ни парадоксально звучит, допустимо пользоваться «недопустимыми» преобразованиями. Надеюсь, я не утомил тебя. Пока дам простой совет: по возможности старайся избегать недопустимых преобразований. Сейчас, ещё немного, и мы разберем твою работу, и я покажу тебе, как это делать в случае тех уравнений. Но сначала закончим формулировку определений: у нас ещё три определения, касающиеся преобразований отдельных выражений. Все преобразования будут предполагаться **тождественными**, то есть значения нового выражения совпадают со значениями старого при всех допустимых значениях переменных, но вот области допустимых значений переменных могут меняться.

4. Тождественное преобразование <u>выражения</u> называется равносильным, если область определения нового выражения совпадает с областью определения исходного выражения. Отметим, что выражение может включать в себя как одну, так и несколько переменных, и под областью определения понимается множество допустимых значений переменных.

5. Тождественное преобразование <u>выражения</u> называется допустимым, если область определения нового выражения включает в себя область определения исходного выражения. Иными словами, область определения может расшириться. Очень хорошо, если в самом начале решения какого-то уравнения удаётся найти ОДЗ, как ты и сделала в своей работе. После того, как

ОДЗ найдено, допустимые преобразования отдельных выражений можно делать смело. Нужно только в конце проверить, принадлежит ли каждый из найденных корней ОДЗ.

6. Тождественное преобразование выражения называется «недопустимым», если область определения нового выражения является подобластью области определения исходного выражения. Иными словами, область определения может сузиться.

Сделаем несколько важных замечаний.

а.) Мы будем пользоваться понятием «преобразование уравнения в целом». Это – применение какого-либо действия к обеим частям уравнения одновременно. Но наряду с этим существует также термин «преобразование уравнения», под которым понимают любое изменение вида уравнения. Преобразования уравнения в целом – это подмножество множества всех преобразований уравнения. Определения 1-3, сформулированные выше, применимы ко всем преобразованиям уравнений.

б.) Множества допустимых и недопустимых преобразований (как уравнений в целом, так и отдельных выражений) имеют пересечение (общую часть), и эта общая часть – множество равносильных преобразований.

в.) Существуют преобразования (как уравнений в целом, так и отдельных выражений), которые не являются ни допустимыми, ни недопустимыми. Например, можно придумать преобразование отдельного выражения, при котором его область определения изменится, но это изменение не будет ни сужением, ни расширением. Область определения будет просто другой.

Ну а теперь давай разберём твою работу.

Уравнение 1. В числителе второй дроби ты вынесла общий множитель (двойку) за скобки.

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-3)}{x-3}=0$$

Это, безусловно, равносильное преобразование отдельного выражения. Но вот дальше ты решила сократить вторую дробь на $x-3$:

$$\frac{x+1}{x-1}-2=0$$

Заметь, что сократила ты не на число, а на выражение. Как ты думаешь, является ли такое преобразование равносильным? «Нет», - догадалась Лукерья. Оно является **допустимым**, поскольку область определения выражения расширилась. Исходное выражение было не определено при $x=3$, поскольку получался ноль в знаменателе дроби. А новое выражение – это просто число, оно определено при любом значении x. «Верно», - сказал профессор. И, в принципе, решение этого уравнения можно было бы тоже начать с нахождения ОДЗ. А ОДЗ здесь – все числа, кроме 1 и 3. И тогда ты бы увидела, что тот корень $x=3$, который ты нашла, не входит в ОДЗ. То есть, он – «лишний», он не является корнем исходного уравнения. Но давай проследим твой ход мысли до конца. Дальше ты перенесла двойку в правую часть, изменив знак на противоположный, и это, безусловно, равносильное преобразование всего уравнения в целом. Кстати, это то же самое, что к обеим частям уравнения прибавить два. Но вот дальше ты решила обе части уравнения умножить на выражение $x-1$, и получилось

$$x+1=2(x-1)$$

-Как ты думаешь, это равносильное преобразование?

-Наверно, нет. ОДЗ переменной в уравнении при этом расширилась. Но вот как строго доказать, является ли оно допустимым, или недопустимым, а может быть даже равносильным? Ведь заранее нельзя сказать, как изменилось при этом множество корней: расширилось, сузилось, а может быть, даже осталось прежним. Что-то я не могу с ходу сообразить…

-Ты хорошо рассуждаешь. И ты честно призналась, что не знаешь ответ, а не стала действовать наугад. Ты – молодец. Я ценю эти качества в учёных. И в будущих учёных. Умножение или деление обеих частей уравнения на некоторую функцию, да ещё и последующее преобразование одного из выражений (ты ведь сделала ещё сокращение слева) – это операция, требующая некоторого внимания. Точнее говоря, это даже уже две операции, если учесть сокращение. Но мы сейчас не будем отвлекаться на это. Давай вернёмся к исходному уравнению, и я покажу тебе стандартный способ его решения. Кстати, такой класс уравнений называется «дробно-рациональные уравнения» или просто «рациональные уравнения». Способ этот простой. Переносим все дроби в одну сторону (а в нашем случае они уже и так в одной стороне), и приводим их к общему знаменателю. Приводим всё к одной дроби. Получается вот что:

$$\frac{(x+1)(x-3)-2(x-3)(x-1)}{(x-1)(x-3)}=0$$

Теперь упрости выражение в числителе. Что получится? Лукерья легко это проделала и увидела, что там получается полный квадрат:

$$\frac{-(x-3)^2}{(x-1)(x-3)}=0$$

Ну а теперь – простое правило. Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель определён и не равен нулю. Так каковы корни этого уравнения? «Теперь я вижу», - сказала Лукерья. У него нет корней. Числитель равен нулю только при $x=3$, но при этом знаменатель тоже равен нулю. «Правильно», - сказал профессор. Переходим ко второму уравнению.

Уравнение 2. $\sqrt{x+4}=-x-2$

Сначала ты нашла ОДЗ. Что ж, хорошо. А дальше ты возвела обе части уравнения в квадрат:

$$x+4=x^2+4x+4;$$

Это – преобразование всего уравнения в целом. Попробуй определить: является ли оно равносильным? Лукерья стала рассуждать: «Пусть одно число равно второму числу. Тогда квадрат первого числа также равен квадрату второго числа. Но верно ли обратное? Пусть нам известно, что квадрат первого числа равен квадрату второго числа. Следует ли отсюда, что первое число равно второму числу? Нет! Эти числа могут быть противоположными по знаку. То есть, возможны два варианта: либо числа равны, либо они – противоположные. Что же произошло, когда мы возвели обе части уравнения в квадрат? Получилось новое уравнение: квадрат первой функции равен квадрату второй функции. Но отсюда не следует, что первая функция равна второй функции. Возможны два варианта, то есть, два уравнения: либо первая функция равна второй, либо первая функция равна второй функции со знаком минус. Вместо одного уравнения мы, таким образом, получаем два, одно из которых совпадает с исходным. Следовательно, множество корней может расшириться. Я поняла! Возведение обеих частей уравнения в квадрат является **допустимым** преобразованием, причём всегда, независимо от того, какие функции возводятся в квадрат». «Отлично!» – воскликнул профессор. Вот такие люди нужны нашей науке, и во мне крепнет надежда, что у неё скоро будет новый рассвет. Я добавлю только одну маленькую деталь: если про функции заранее известно, что они неотрицательны, например, если это модули от каких-то выражений, то тогда возведение обеих частей в квадрат – равносильное преобразование. Равносильное преобразование – частный случай допустимого, так что сформулированное тобой утверждение совершенно верно. Но в нашем конкретном случае преобразование является не равносильным, но допустимым. Так как же в таком случае дальше решать уравнение?

–Я решала уравнение после того, как сделала допустимое преобразование всего уравнения в целом, и нашла корни 0 и –3. Если исходное уравнение имеет корни, то ими могут быть только числа 0 и –3. Но среди этих чисел могут быть «лишние» корни. Как отбросить «лишние» корни, если они есть? Я проверила, входят ли эти числа в ОДЗ исходного уравнения, и оказалось, что оба они входят. И я подумала, что оба эти числа являются корнями исходного уравнения. Но теперь я поняла: когда мы делаем преобразование всего уравнения в целом, найденные корни могут входить в ОДЗ, но всё равно быть «лишними». Пусть у нас было какое-то уравнение: одна функция равна другой функции:

$$f(x)=g(x)$$

Если мы возведём обе части уравнения в квадрат:

$$f^2(x)=g^2(x)$$

то это эквивалентно тому, что вместо одного уравнения у нас появилась совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$$

Второе уравнение в этой совокупности может дать «лишние» корни, которые могут принадлежать ОДЗ каждого из этих уравнений. Мне пока приходит на ум такой способ отбросить «лишние» корни: подставить все найденные корни в исходное уравнение и посмотреть, выполняется ли оно. Возьмём число 0. Подставляя его в исходное уравнение, мы получаем:

$$2=-2$$

Это – неверное равенство. Значит, ноль – «лишний» корень. Теперь возьмём число –3. Подставим в исходное уравнение. Получается:

$$1 = 1$$

Это – верное равенство. Значит, у исходного уравнения один корень: –3.

«Очень хорошо», – сказал профессор. Этот способ проверки корней действительно работает. По крайней мере, в тех случаях, когда множество корней счётно и конечно, хотя, в каких-то случаях считать будет долго и неудобно. Я покажу тебе ещё один способ решать **иррациональное уравнение** такого типа, которое тебе встретилось. Ты уже рассуждаешь достаточно хорошо и наверняка сама сможешь доказать вот такое утверждение. Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

равносильно системе условий:

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

А ещё вот полезное утверждение. Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

равносильно системе условий:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Это будет твоё первое домашнее задание. Ну а сейчас – идём дальше. Не менее интересные вещи у нас ещё впереди.

Уравнение 3. $\sin\left(x^2 + 2x\right) = \sin(x + 2)$

Здесь ты решила просто «отбросить синусы» и перешла к уравнению

$$x^2 + 2x = x + 2$$

Ты знаешь, если бы вместо синуса была функция, которая определена на всей числовой прямой и при этом строго монотонна (строго убывает или строго возрастает), то такое преобразование уравнения было бы равносильным. Но только вот синус – это функция, которая не только не монотонная на всей числовой прямой, но ещё и периодическая. С учётом этого, сделанное тобой преобразование – как ты думаешь, какое оно?

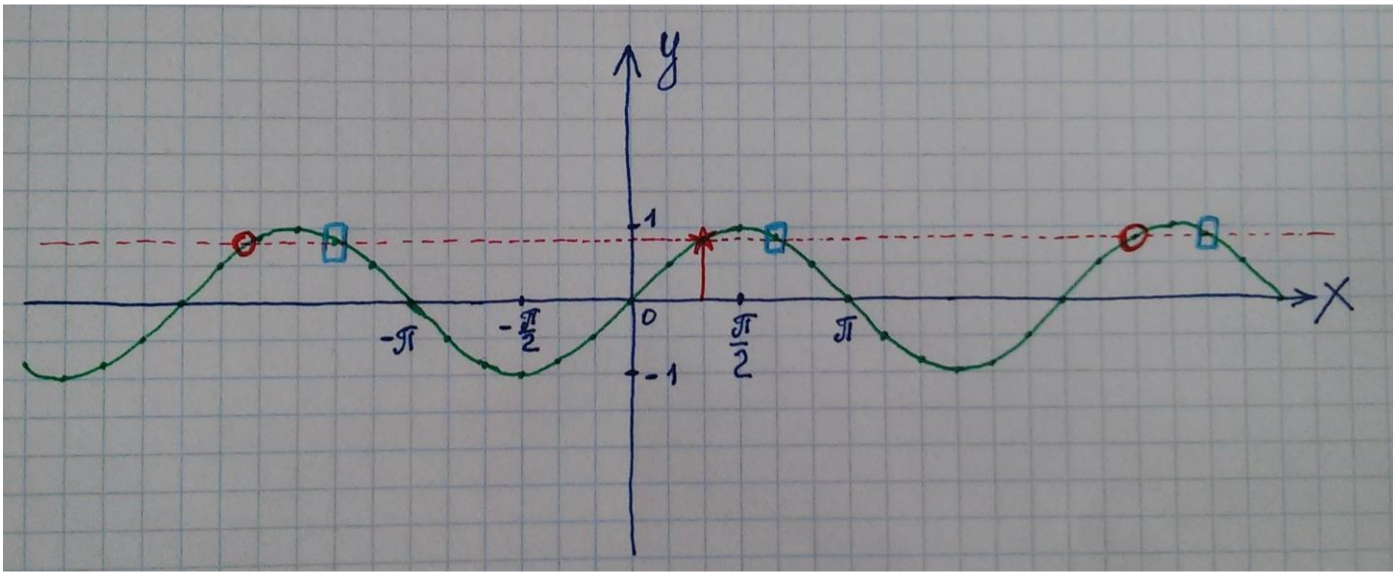
«Я поняла: оно **недопустимое**», – сказала Лукерья. Оно сужает множество корней. К любой части полученного уравнения можно прибавить период синуса, то есть, записать:

$$x^2 + 2x = x + 2 + 2\pi n,\ n \in Z$$

и все корни этого уравнения также будут корнями исходного уравнения.

«Так уже лучше», – сказал профессор. Но как ты думаешь, вот это последнее уравнение, которое ты записала – оно равносильно исходному уравнению, или всё-таки нет?

Лукерья почувствовала себя уставшей. Сегодня она уже неплохо поработала и поучила хорошую порцию новой для себя информации. Но, собравшись с силами, она решила нарисовать график синуса и стала рассуждать. Она решила отвлечься от данного конкретного уравнения и провести рассуждения в общем виде.



Пусть имеется уравнение такого вида: синус одной функции равен синусу другой функции.

$\sin f(t) = \sin g(t)$

Неизвестную в этом уравнении я обозначу как *t*, чтобы не путать с переменной *x* на графике. Пусть при каком-то значении *t* первая функция равна единице: $f(t) = 1$. Тогда это соответствует точке $(1; \sin 1)$на графике, которую я обозначу красной звёздочкой. При каких значениях второй функции уравнение обращается в верное равенство? Если я буду прибавлять к $f(t)$ целое число периодов синуса, то я буду попадать в точки, обозначенные на графике красными кружками. Но, кроме этих точек, есть ещё точки, обозначенные синими квадратами, которые также соответствуют решениям исходного уравнения. Поэтому, переходя к уравнению

$f(t) = g(t) + 2\pi n,\ n \in Z$

я всё равно потеряю часть корней. Поэтому такое преобразование уравнения является недопустимым. Но можно попытаться всё-таки найти равносильное преобразование. Например, если мы рассмотрим какую-нибудь ось симметрии графика синуса, скажем, прямую $x = \pi/2$, то при отражении относительно этой оси красная звёздочка перейдёт в один из синих квадратиков…

«Очень хорошо», – сказал профессор. Но давай я покажу тебе, как всё это сделать проще. Нужно всего лишь воспользоваться вот такой формулой из тригонометрии: разность синусов.

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Переход от левой части этой формулы к правой и наоборот – равносильное преобразование выражения. И в рассматриваемом типе уравнений нужно всего лишь перенести оба синуса в одну сторону и применить эту формулу. Тогда исходное уравнение, которое было тебе дано, преобразуется к виду:

$$2\sin\frac{x^2+x-2}{2}\cos\frac{x^2+3x+2}{2} = 0$$

которое, как легко понять, равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+x-2}{2} = \pi n, n \in Z \\ \dfrac{x^2+3x+2}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

И теперь осталось решить два квадратных уравнения, в которых n и k будут параметрами. Числа n и k будут пробегать уже не все целые значения, а только такие, при которых дискриминанты этих уравнений неотрицательны. Но это всё – уже мелкие детали, с которыми ты легко справишься. Давай перейдём теперь к логарифмическим уравнениям.

Уравнение 4. $\log_2(\mathrm{x}-6)^2 + 2\log_2(4-\mathrm{x}) = 0$

ОДЗ была найдена верно. А дальше ты применила известную формулу – формулу логарифма степени, или «формулу сноса» степени, и снесла квадрат в первом члене:

$2\log_2(\mathrm{x}-6) + 2\log_2(4-\mathrm{x}) = 0$

Как ты думаешь, что при этом произошло?

-Я поняла. Это было **недопустимое** преобразование выражения. Исходное выражение было определено при всех x, кроме $x=6$. А когда я снесла квадрат, новое выражение стало определено только при $x>6$. Значит, могла произойти потеря корней. Но у меня есть идея! Не будем сносить квадрат в первом члене, а наоборот, во втором члене занесём двойку в степень:

$$\log_2(x-6)^2+\log_2(4-x)^2=0$$

Такое преобразование – **допустимое**, поскольку область допустимых значений x расширится. Исходное выражение было определено при $x<4$, а после занесения двойки в степень оно стало определено при всех x, кроме 4. Теперь заменим сумму логарифмов логарифмом произведения.

$$\log_2\left((x-6)^2(4-x)^2\right)=0$$

Это преобразование – тоже **допустимое**, ведь сумма логарифмов определена, когда оба аргумента логарифмов положительны, а логарифм произведения определён также и когда оба они отрицательны. А в нашем конкретном случае такое преобразование будет даже равносильным. Ну а последнее уравнение равносильно уравнению

$$(x-6)^2(4-x)^2=1$$

«Всё верно», – сказал профессор, вновь радуясь за свою ученицу. «А это уравнение дорешать можешь»? «Если возводить в квадрат скобки слева, то получится уравнение четвёртой степени», – сказала Лукерья. Но я вижу другой способ. Если перенести единицу влево и воспользоваться формулой разности квадратов, то мы увидим, что это уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}(x-6)(4-x)=1\\(x-6)(4-x)=-1\end{array}\right.$$

И вот второе уравнение в этой совокупности я как раз потеряла сначала, в неправильном варианте решения.

«Молодец», – сказал профессор. Переходи к последнему уравнению.

Уравнение 5. $-\log_9(x+3)^2=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+5}{x+3}$

«ОДЗ ты снова нашла правильно», – сказал профессор. Кстати, а что бы ты стала делать, если бы найти ОДЗ не удавалось? Например, при поиске ОДЗ возникало бы уравнение, которое сложнее самого исходного уравнения, или вообще не решалось бы аналитически? Такие ведь бывают.

-Я бы старалась делать только равносильные преобразования. Но, если без этого обойтись не получается, я бы делала также и допустимые преобразования, а потом проверила бы найденное множество корней подстановкой в исходное уравнение.

-Хорошо. Только могло получиться так, что найденное множество корней бесконечно или даже непрерывно. Тогда проверять будет посложнее. Но в данном конкретном примере ОДЗ найти было просто. Что ж, продолжай рассуждать дальше.

-Я преобразовала это уравнение к виду

$$-\log_3(x+3)=\log_3\frac{x+5}{x+3}$$

Но преобразование левой части было уже **недопустимым**, поскольку область определения выражения слева сузилась. Попробуем сделать по-другому. Приведём логарифм в правой части к основанию 9:

$$-\log_9(x+3)^2=\frac{1}{2}\log_9\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^4$$

Это преобразование – **допустимое**. Появилась чётная степень, область определения расширилась. Теперь преобразуем ещё вот так:

$$-\log_9(x+3)^2=\log_9\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^2$$

Это преобразование – равносильное, поскольку степень по-прежнему чётная. Теперь перенесём всё в одну стороны и заменим сумму логарифмов логарифмом произведения. Это преобразование допустимое, а в данном случае даже равносильное. Получим:

$$\log_9\left((x+3)^2\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^2\right)=0$$

Теперь сделаем ещё одно допустимое преобразование: сократим на $(x+3)^2$ в аргументе логарифма. Допустимые преобразования выражений ведь делать можно, главное – проверить потом, принадлежит ли каждый из найденных корней ОДЗ. Получается:

$$\log_9(x+5)^2=0,$$

$$(x+5)^2=1.$$

У последнего уравнения два корня: $x=-4$ и $x=-6$. И вот второй-то корень я как раз потеряла при неправильном решении, когда делала недопустимые преобразования. А этот второй корень как раз принадлежит ОДЗ. Оказывается, что у этого уравнения есть корень: $x=-6$.

«Верно», - сказал профессор. А в завершение сегодняшней встречи я покажу тебе ещё один полезный метод, которым можно было решить последнее уравнение, да и предпоследнее тоже. Вместо недопустимых преобразований

$$\log_9(x+3)^2=2\log_9(x+3)$$

и

$$\log_3\frac{x+5}{x+3}=\log_3(x+5)-\log_3(x+3)$$

можно было сделать преобразования

$$\log_9(x+3)^2=\log_3|x+3|$$

и

$$\log_3\frac{x+5}{x+3}=\log_3|x+5|-\log_3|x+3|$$

первое из которых является **равносильным**, а второе – **допустимым.** И тогда ты пришла бы к уравнению

$$\log_3|x+5|=0,$$

$$|x+5|=1,$$

и это простенькое уравнение с модулем имеет корни –4 и –6. Мне это решение кажется даже чуть более элегантным. Иногда модуль – хорошая штука…

…тот день стал для Лукерьи началом новой жизни. Она начала изучать математику на новом уровне. А мы предоставим читателю упражнения, которые помогут отработать мастерство применения различных преобразований.

Задания для самостоятельного решения.

1. Преобразования отдельных выражений. Заполните таблицу. Перед стрелкой – исходное выражение, после стрелки – конечное. Определите, какое это преобразование: равносильное, допустимое или недопустимое. В начале дано несколько примеров. $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные функции, свойства которых заранее неизвестны.

$(a+b)^2 \to a^2+2ab+b^2$	Равносильное
$\sqrt{x^2} \to \|x\|$	Равносильное
$\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)} \to \sqrt{f(x)\cdot g(x)}$	Допустимое
$\sqrt{f(x)\cdot g(x)} \to \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}$	Недопустимое
$\left(\sqrt{x}\right)^2 \to x$	
$\frac{(x+5)^3}{(x+5)^2} \to x+5$	
$\frac{x+10}{\sqrt{x+10}} \to \sqrt{x+10}$	

$x \to \frac{x^5}{x^4}$	
$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \to x$	
$a^2 - b^2 \to (a-b)(a+b)$	
$\frac{(x+y)^4}{(x+y)^2} \to (x+y)^2$	
$\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}} \to \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$	
$\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} \to \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$	
$\frac{\sin x}{\cos x} \to tgx$	
$tgx \to \frac{1}{ctgx}$	
$tgx \cdot ctgx \to 1$	
$\log_2 x + \log_2 y \to \log_2 xy$	
$\log_2 xy \to \log_2 x + \log_2 y$	
$\log_5 x^2 \to 2\log_5 x$	
$\log_5 x^2 \to 2\log_5 \lvert x \rvert$	
$\log_5 x^3 \to 3\log_5 x$	
$\log_2 x - \log_2 y \to \log_2 \frac{x}{y}$	
$\log_2 \frac{x}{y} \to \log_2 x - \log_2 y$	
$\log_2 \frac{x}{y} \to \log_2 \lvert x \rvert - \log_2 \lvert y \rvert$	
$\log_2 xy \to \log_2 \lvert x \rvert + \log_2 \lvert y \rvert$	
$\log_7 x \to \frac{\log_5 x}{\log_5 7}$	
$\log_x 9 \to \frac{1}{\log_9 x}$	
$\frac{1}{\log_9 x} \to \log_x 9$	
$f(x)^{g(x)} \to a^{g(x)\log_a f(x)}$ $a > 0,\ a \neq 1$	
$x \to \log_5 5^x$	

2. Преобразования уравнений в целом. Заполните таблицу. Сверху записано исходное уравнение, снизу – новое. Определите, какое это преобразование: равносильное, допустимое или «недопустимое». В начале дано несколько примеров. $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ – произвольные функции, свойства которых заранее неизвестны. $f^2(x)$ означает возведение функции в квадрат.

$2^{f(x)} = 2^{g(x)}$ $f(x) = g(x)$	Равносильное

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ $f(x) = g^2(x)$	Допустимое
$f(x)\cdot h(x) = g(x)\cdot h(x)$ $f(x) = g(x)$	Недопустимое
$f(x)\cdot h(x) = g(x)\cdot h(x)$ $h(x)\cdot\left(f(x) - g(x)\right) = 0$	
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ $f(x) = g(x)$	
$f^2(x) = g^2(x)$ $f(x) = g(x)$	
$\left\|f(x)\right\| = g(x)$ $f(x) = g(x)$	
$\left\|f(x)\right\| = \left\|g(x)\right\|$ $f(x) = g(x)$	
$\left\|f(x)\right\| = \left\|g(x)\right\|$ $f^2(x) = g^2(x)$	
$\log_2 f(x) = \log_2 g(x)$ $f(x) = g(x)$	
$f(x) = g(x)$ $\log_2 f(x) = \log_2 g(x)$	
$f(x) = g(x)$ $3^{f(x)} = 3^{g(x)}$	
$a^{f(x)} = b^{g(x)}$ $f(x) = g(x)\cdot\log_a b$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$	
$\sin f(x) = \sin g(x)$ $f(x) = g(x)$	
$f(x) = g(x)$ $\sin f(x) = \sin g(x)$	
$\arcsin f(x) = \arcsin g(x)$ $f(x) = g(x)$	
$f(x) = g(x)$ $\arcsin f(x) = \arcsin g(x)$	
$arctgf(x) = arctgg(x)$ $f(x) = g(x)$	
$f(x) = g(x)$ $arctgf(x) = arctgg(x)$	

3. Школьник решает уравнение вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$. Он нашёл ОДЗ переменной x в этом уравнении, а после этого сделал преобразование, которое некоторые школьники называют «отбросить логарифмы»: перешёл к уравнению

$$f(x) = g(x)$$

Решив это уравнение, он проверил найденные корни на принадлежность найденной ранее ОДЗ и выбрал те корни, которые принадлежат ОДЗ. Правилен ли такой алгоритм решения уравнений данного вида? Можно ли применять такой алгоритм, если вместо логарифма будет другая функция, строго монотонная на всей своей области определения, но определённая не на всей числовой прямой?

4. Решите уравнение:

а.) $\dfrac{x^{2015}}{x^{2016}}+\dfrac{x^{2016}}{x^{2015}}=12$

б.) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{2x+6}{x+3}=0$

в.) $\dfrac{x-9}{x-3}=\dfrac{10-2x}{x-5}$

г.) $\dfrac{x-2}{x-5}+\dfrac{2x-6}{x-3}=0$

д.) $\sqrt{x+4}=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$

е.) $\sqrt{x^2+6x+9}=x+3$

ё.) $\sqrt{x^3+x-5}=\sqrt{x^3+10-x}$

ж.) $2|3-x|=x+4$

з.) $|3-x|=2x+4$

и.) $|x^3+x^2-9x+8|=|x^3+4x-x^2-8|$

к.) $\dfrac{\sin 2x}{2\cos x}=1$

л.) $\sqrt{5\sin x}-2\cos x=0$

м.) $\sin\left(x^2+2x\right)=\cos(x+2)$

н.) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x-7\cos^2 x=0$

о.) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x+7\cos^2 x=5$

п.) $2\log_2(x-6)+\log_2(4-x)^2=0$

р.) $7^{\ln(x^2-2x)}=(2-x)^{\ln 7}$

с.) $5\cdot x^{\log_3 2}+2^{\log_3 x}=24$

т.) $1+\log_{0,25}(x+1)^2=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x+5}{x+3}$

у.) $\sqrt{5\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}$

ф.) $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$

5. Требуется решить неравенство вида $\log_a f(x)+\log_a g(x)\le\log_a h(x)$, где $a>1$, причём области, где $f(x)$ и $g(x)$ положительны, найти удалось, а область, где $h(x)$ положительна, найти не удалось, и это затрудняет нахождение ОДЗ. Как проще всего решить неравенство в этом случае? Рассмотрите общий случай и конкретный пример: $\log_3\dfrac{1}{x}+\log_3\left(x^2+3x-9\right)\le\log_3\left(x^2+3x+\dfrac{1}{x}-10\right)$

6. Найдите хотя бы один корень уравнения $(x-1)^{x+6}=81$. Сколько всего у него корней?

7. Найдите область определения функции $y=x^x$, производную этой функции и область определения производной.

8. Приведите пример преобразования отдельного выражения и преобразования уравнения в целом, которые не являются ни допустимыми, ни недопустимыми.