М.Ю. РОМАШКА

РАЗВИВАЮЩАЯ ФИЗИКА

Механика

ПРОДВИНУТЫЙ КУРС ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И АБИТУРИЕНТОВ

Учебник и сборник задач по механике в одной книге

Задачи всех уровней сложности – от простых до олимпиадных

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Серия книг «Развивающая физика»

Физика занимает важное место среди школьных предметов. Она изучает наиболее общие законы, по которым существует наш мир. Изучить физику – это значит не только понять физические законы, но и уметь применять их на практике. Всякое применение законов физики для решения какого-нибудь конкретного вопроса – это решение физической задачи.

Эта книга поможет вам овладеть важным умением – *умением решать задачи*. Это умение пригодится представителям самых разных профессий. Поэтому, даже если ваша будущая работа не будет связана с физикой, навыки, полученные при решении физических задач, помогут вам справиться с различной интеллектуальной работой. При решении задач вы научитесь работать с формулами. Этот навык важен для всех, кто будет выполнять какие-либо расчёты. Автор надеется, что, какую бы профессию вы ни выбрали, решение задач на уроках физики станет для вас интересным и развивающим занятием.

Структура книги и работа с книгой

Эта книга содержит в себе изложение всего школьного курса механики, изучаемого в 9 и 10 классах, а также несколько дополнительных тем, за исключением темы «колебания и волны», изучаемая подробно в 11 классе. В книге разобраны вопросы, отсутствующие в ряде стандартных школьных учебников, но необходимые для глубокого понимания классической механики (движение центра масс, теорема об изменении кинетической энергии, определение мгновенной скорости и др.). Знание данных вопросов крайне желательно при поступлении в вуз и участии в олимпиадах по физике высокого уровня.

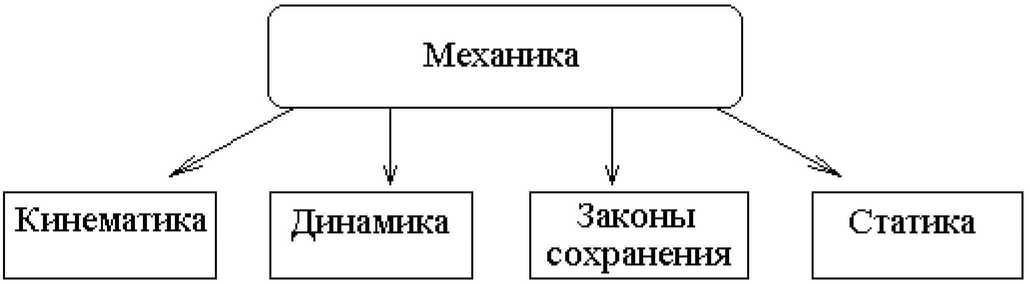
При создании данной книги автор стремился скорректировать ряд недостатков стандартных учебников, к которым относятся некорректные формулировки некоторых определений и законов, а также сделать изложение как можно более полным и точным в теоретическом плане. Вместе с тем к достоинствам данной книги относится лаконичный стиль изложения, позволяющий сэкономить время при изучении теории и уделить больше внимания решению задач.

Подборка интересных задач занимает центральное место в этой книге. Многолетний опыт преподавателей самых разных предметов показывает, что учащийся усваивает материал лучше, когда он проявляет познавательную активность, то есть решает задачи. Каждая задача – это маленькое самостоятельное исследование, в ходе которого ученик погружается в среду предмета и развивает свои умственные способности. Поэтому автор советует уделять больше времени решению задач, чем простому заучиванию материала.

В книге собрано множество задач различной сложности по каждой теме, так, что книга рассчитана на широкий круг учащихся – от «средних» до сильно увлечённых физикой. Учителю следует выбирать задачи в соответствии с уровнем класса. Для того чтобы помочь ученикам в освоении навыков решения задач, в конце книги даны *подсказки* к задачам. Каждую задачу (кроме тех, которые разбираются учителем в классе) сначала нужно пробовать решить самостоятельно. Если это не получается, то прочитайте подсказку.

Перед каждой подсказкой в квадратных скобках указана сложность задачи по десятибалльной системе. Один или два балла – это типовые задачи, которые должны уметь решать все ученики. Три балла – это задача «чуть сложнее типовой». Четыре балла – задача содержит какую-либо трудность или требует нестандартного, творческого подхода. Задачи, сложность которых выше 5 баллов, предназначены для классов с углубленным изучением физики и для тех, для кого физика станет в числе любимых предметов. Оценка задач по сложности приближённая; она поможет учителю выбрать подходящие задачи.

Механика – раздел физики, в котором изучаются законы движения тел.
Телом называют любой предмет, фигурирующий в физической задаче.
В механике традиционно выделяют четыре основных раздела:



Глава 1. Кинематика

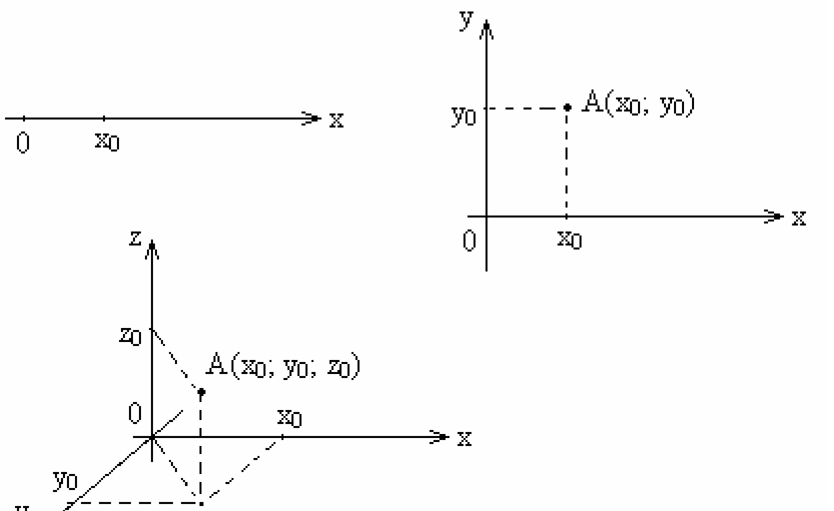
§ 1. Основные понятия кинематики

Кинематика – раздел механики, в котором движение тел рассматривается без выяснения причин этого движения. Кинематика изучает математическое описание движения.
Механическое движение – изменение положения тела относительно других тел с течением времени.

Движение всегда относительно. Говоря о движении тела, нужно указать, относительно каких тел происходит движение. Например, человек, сидящий в поезде, движется относительно земли и железной дороги, но неподвижен относительно вагона поезда. Лодка, плывущая вниз по течению реки, движется относительно земли быстрее, чем относительно воды.

Часто при решении задач размерами какого-нибудь тела можно пренебречь, то есть считать это тело точкой. Например, при движении автобуса из одного города в другой можно не учитывать размеры автобуса и считать его одной точкой.

Материальная точка – тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.
Чтобы описывать положение материальной точки относительно других тел, удобно ввести систему координат, жёстко связанную с каким-то телом. Системы координат бывают одномерными (ось координат), двумерными и трёхмерными.



Чтобы описывать движение материальной точки, удобно ввести систему отсчёта.
Система отсчёта – это тело отсчёта, связанная с ним система координат и часы.
Радиус-вектор точки – это вектор, проведённый из начала координат в данную точку.
Радиус-вектор материальной точки однозначно определяет её положение в пространстве (в системе координат). *Задание радиус-вектора эквивалентно заданию всех координат точки.*
В следующих определениях тело можно считать материальной точкой.
Траектория движения (или просто траектория) – линия, по которой движется тело.
Путь – длина участка траектории, пройденного телом при его движении.

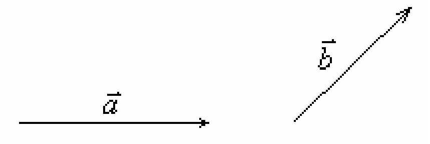
В международной системе единиц СИ длина и путь измеряются в метрах.
1 км = 1000 м, 1 дм = 0,1 м, 1 см = 0,01 м, 1 мм = 0,001 м.
Перемещение – вектор, соединяющий начальное положение тела с последующим.
Не путайте путь и перемещение. Помните, что перемещение – это вектор.

Если тело нельзя считать материальной точкой, то его движение описать сложнее. Самое простое движение тела ненулевых размеров – такое, при котором все его точки движутся одинаково. Такое движение называется *поступательным*. Дадим более точное определение:
Движение тела называется поступательным, если любой отрезок, соединяющий две точки тела, переносится параллельно самому себе.

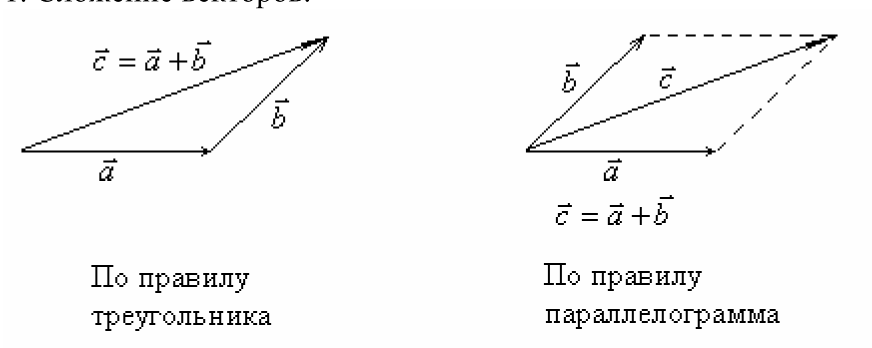
В следующих параграфах этой главы будем рассматривать движение материальной точки.

§ 2. Основные действия с векторами. Проекция вектора на координатную ось

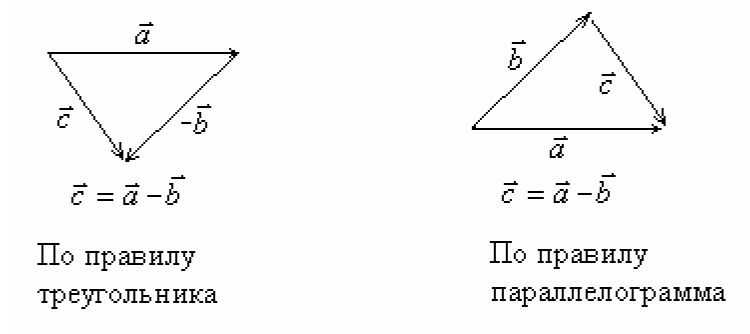
Повторим навыки работы с векторами. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



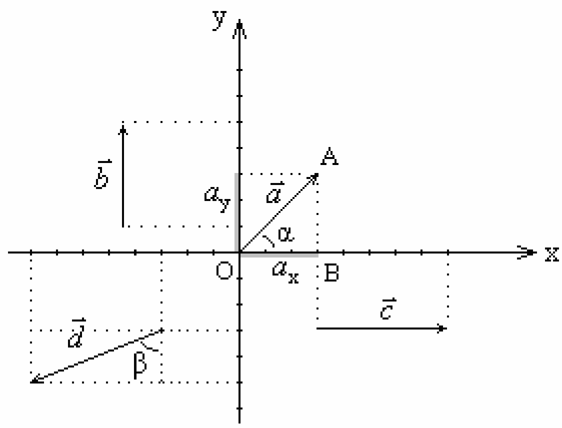
1. Сложение векторов.



2. Вычитание векторов. Всегда можно написать: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



3. Проекция вектора на координатную ось.
Проекция вектора на координатную ось – это разность координат конца и начала вектора.



$a_x = a\cos\alpha$,

$a_y = a\sin\alpha$ – это равенства получаются из прямоугольного треугольника OAB. Запишите, чему равен синус и косинус угла α по определению. Из полученных равенств выразите a_x и a_y.

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ – это следствие из теоремы Пифагора.

Маленькое упражнение: вычислите проекции a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y (в единицах масштаба системы координат). Выразите d_x и d_y через модуль d и угол β.

§ 3. Равномерное и неравномерное движение. Скорость

Движение тела называется равномерным, если оно за любые равные промежутки времени проходит одинаковые пути.

Для равномерного движения можно ввести такое определение скорости: скорость равномерного движения – это путь, делённый на время, за которое он пройден:

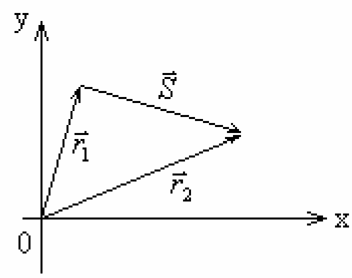
$$\upsilon = \frac{s}{t} \qquad (1)$$

Это самое простое определение скорости. Однако оно не учитывает направления движения. Чтобы учесть направление движения, скорость должна быть векторной величиной.

Скорость тела при равномерном прямолинейном движении – это перемещение, делённое на время, за которое оно совершено:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (2)$$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{S}$, $\vec{S}$ – перемещение (как видно из рисунка, перемещение равно изменению радиус-вектора).



$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{S}}{\Delta t}$,

$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}$. Выразим отсюда $\vec{r}_2$. Получим: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\upsilon}\Delta t$.

Далее будем для удобства начальный радиус-вектор обозначать как $\vec{r}_0$, а конечный – $\vec{r}$. Перепишем последнюю формулу в новых обозначениях:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}\Delta t \qquad (3)$$

Если справедливо векторное равенство, то справедливо и равенство проекций. Обратно, если справедливы равенства всех проекций, то справедливо векторное равенство. Поэтому из формулы (3) следует формула для приращения координаты:

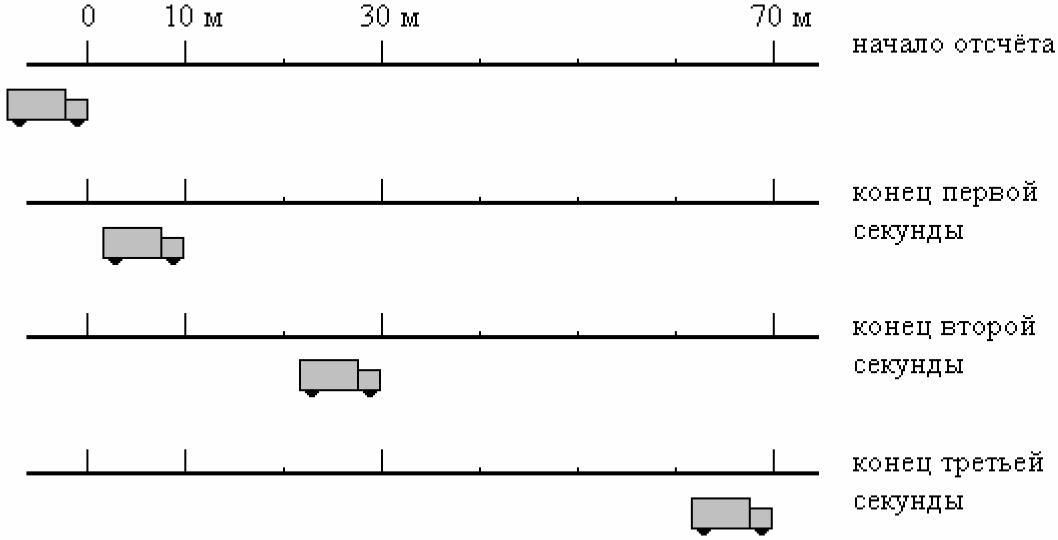
$$x = x_0 + \upsilon_x\Delta t \qquad (4)$$

Мы ввели определение скорости для равномерного движения и вывели формулы зависимости координаты и радиус-вектора от времени. А как ввести определение скорости для неравномерного движения? Какой формулой его выразить? Это, оказывается, непростой вопрос. Ответ на него дал великий английский физик и математик Исаак Ньютон (1643-1727) и его современники.

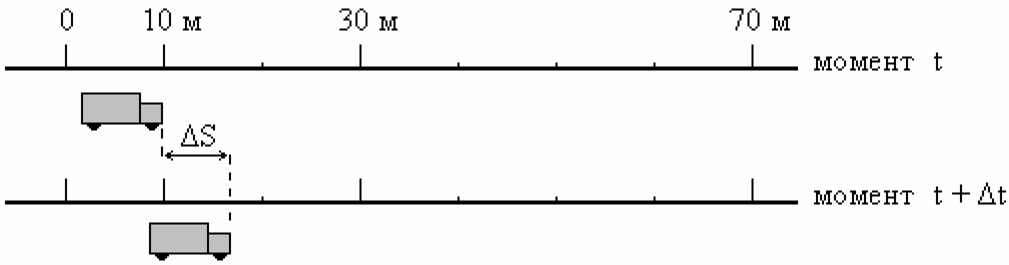
§ 4. Скорость при неравномерном движении. Мгновенная и средняя скорость

Попытаемся дать определение скорости для случая, когда движение переменно (не равномерно). Рассмотрим движение трогающегося с места и разгоняющегося автомобиля. За первую секунду автомобиль прошёл 10 метров, за вторую – 20 метров, а за третью – 40 метров. Как видим, движение не равномерное. Как определить, чему равна скорость автомобиля около отметки 10 м, то есть через 1 секунду после старта? Если мы попытаемся вычислить скорость автомобиля по формуле (1), то мы наткнёмся на трудность: скорость будет получаться разной в зависимости от того, какой путь s мы будем подставлять в формулу.

Если мы подставим путь s = 20 м, пройденный между отметками 10 м и 30 м за t = 1 с, то мы получим скорость 20 м/с. А если мы подставим путь s = 60 м, пройденный между отметками 10 м и 70 м за t = 2 с, то мы получим скорость 30 м/с. Какую же скорость считать «истинной» скоростью автомобиля в данной точке?



Ньютон придумал выход из этого затруднения. Рассмотрим некоторый путь ΔS, пройденный за время Δt после того, как автомобиль миновал отметку 10 м. Следуя формуле (1), составим дробь $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Эта дробь будет разной в зависимости от того, какое значение ΔS мы возьмём.



Но применим новый приём. Будем брать всё меньший и меньший отрезок времени Δt. ***Будем стремить* Δt *к нулю.*** При этом ΔS тоже стремится к нулю (отрезок ΔS стягивается в точку). Получается, что числитель дроби $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ стремится к нулю, но знаменатель тоже стремится к нулю, и в итоге *дробь стремится к какому-то числу. Это число и является скоростью* (точнее, модулем скорости, поскольку скорость – векторная величина).

Приведём примеры из математики, когда числитель и знаменатель дроби стремится к нулю, а сама дробь стремится к какому-то числу, отличному от нуля. Рассмотрим дробь $\frac{2x}{x}$. К чему стремится эта дробь при стремлении x к нулю? Вычислим значения дроби при x = 1; x = 0,1; x = 0,01 и x = 0,001:

$$\frac{2}{1}=2,\qquad \frac{0{,}2}{0{,}1}=2,\qquad \frac{0{,}02}{0{,}01}=2,\qquad \frac{0{,}002}{0{,}001}=2$$

Очевидно, что дробь стремится к числу 2 при стремлении x к нулю. Число 2 называется ***пределом*** данной дроби при x, стремящемся к нулю. Мы специально взяли такую дробь, предел которой легко вычислить (икс вообще сокращается). Конечно, не всегда предел функции вычисляется так просто. Например, можно доказать, что дробь $\frac{\sin x}{x}$ стремится к 1 при x, стремящемся к нулю (это называется «первый замечательный предел»). Строгое математическое доказательство (и даже строгое математическое определение предела) мы здесь приводить не будем. Однако это можно понять на уровне интуиции. Рассмотрите графики функций y = x и y = sinx вблизи нуля. Вы увидите, что эти графики «сливаются», являются всё более похожими друг на друга при приближении к нулю. Поэтому первый замечательный предел равен единице (обозначается $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$).

Теперь мы готовы дать определение мгновенной скорости (мгновенной скоростью называется скорость движения в данный момент времени или в данной точке траектории). Для случая, когда тело движется по прямой, как автомобиль в рассмотренном примере, мы уже дали определение. Если тело движется не по прямой, то те же рассуждения можно провести для проекций скорости на координатные оси: $\upsilon_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при Δt, стремящемся к нулю, то есть $\upsilon_x=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Аналогично, $\upsilon_y=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$ и $\upsilon_z=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$. Но мы знаем, что задание всех проекций однозначно определяет вектор. Это позволяет дать самое общее, векторное определение мгновенной скорости (или просто скорости):

Мгновенная скорость – это предел отношения $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ***при*** $\Delta t\to 0$.

Это обозначается так:

$$\vec{\upsilon}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\qquad (5)$$

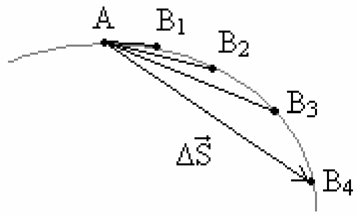
В математике предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю, называется *производной* функции *f* в точке x. Производную вектор-функции можно определить через производные всех её проекций. Поэтому можно дать эквивалентное определение скорости:

Мгновенная скорость – это производная радиус-вектора по времени.

Это обозначается так:

$$\vec{\upsilon}=\vec{r}\,'(t),\ \text{или}\ \vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}\qquad (5')$$

Есть замечательное свойство вектора скорости. ***Вектор мгновенной скорости всегда направлен по касательной к траектории.*** Это видно из следующего рисунка. Пусть материальная точка в некоторый момент находится в точке A.



Рассмотрим перемещение $\Delta\vec{S}$ и будем стремить к нулю время, за которое оно совершено. Конец B вектора перемещения стремится к точке A, и мы видим, что вектор $\Delta\vec{S}$ всё более приближается к отрезку касательной к траектории в точке A.

Неравномерное движение может характеризоваться *средней путевой скоростью* (или просто средней скоростью) $\upsilon_{ср}$.

Средняя скорость – это весь путь, делённый на всё время, за которое он пройден:

$$\upsilon_{ср} = \frac{s}{t} \qquad (6)$$

Средняя скорость – это скалярная (не векторная) величина. Иногда говорят о среднем векторе скорости, но мы под средней скоростью будем понимать скалярную величину.

Задачи

1. Путь по дороге между деревнями Крюково и Которово равен $s = 9$ км. Велосипедист проехал этот путь за время $t = 30$ мин. Чему равна скорость велосипедиста? Запишите ответ в метрах в секунду.

2. Дневной маршрут группы туристов состоял из трёх частей. Длина первой части равна $s_1 = 20$ км, а время её прохождения равно $t_1 = 4$ ч. Вторую часть пути туристы прошли со скоростью $\upsilon_2 = 6$ км/ч за время $t_2 = 1{,}5$ ч. Длина третей части пути равна $s_3 = 8$ км, а скорость на ней равна $\upsilon_3 = 4$ км/ч. Найти:

1. Скорость на первой части пути.
2. Длину второй части пути.
3. Время, за которое была пройдена третья часть пути.

3. Катя и Наташа одновременно выходят навстречу друг другу из деревень Липовка и Демушкино. Расстояние между деревнями равно $s = 8$ км. Катя идёт со скоростью $\upsilon_к = 4$ км/ч, а Наташа – со скоростью $\upsilon_н = 6$ км/ч. На каком расстоянии от Липовки они встретятся?

4. Мальчик подбросил мяч вертикально вверх, а затем поймал его в точке бросания. Максимальная высота подъёма мяча над точкой бросания равна $h = 1$ м. Найдите путь и перемещение мяча.

5. Скорость велосипедиста относительно земли равна $\upsilon_1 = 36$ км/ч, а скорость встречного ветра относительно земли равна $\upsilon_2 = 4$ м/с. Чему равна скорость ветра относительно велосипедиста?

6. Самолёт, летящий на постоянной высоте $h = 8$ км в направлении на север со скоростью $\upsilon_{сам} = 720$ км/ч, сносит ветром, скорость которого направлена на восток и равна $\upsilon_{вет} = 10$ м/с. Введите какую-нибудь систему отсчёта, в которой удобно описывать движение самолёта, и вычислите координаты самолёта спустя время $t = 2$ ч после начала движения.

7. Верно ли, что равномерное движение – это то же самое, что движение с постоянной скоростью?

8. Эскалатор метро поднимает неподвижно стоящего на нём человека за $t_1 = 1$ мин. По неподвижному эскалатору человек поднимается за $t_2 = 3$ мин. Сколько времени будет подниматься идущий вверх человек по движущемуся эскалатору?

9. Мотоциклист первую половину пути проехал со скоростью $\upsilon_1 = 40$ км/ч, а вторую половину пути со скоростью $\upsilon_2 = 60$ км/ч. В пути он не останавливался. Найдите среднюю скорость мотоциклиста.

10. Автомобиль при движении из пункта А в пункт В проехал половину времени со скоростью $\upsilon_1 = 50$ км/ч, а другую половину – со скоростью $\upsilon_2 = 70$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

11. Расстояние $s = 300$ м необходимо проплыть на лодке туда и обратно один раз по реке, скорость течения которой относительно земли равна $\upsilon_1 = 1$ м/с, а другой раз по озеру. Скорость лодки относительно воды в обоих случаях равна $\upsilon_2 = 5$ м/с. Определите, какая поездка займет больше времени: по реке или по озеру.

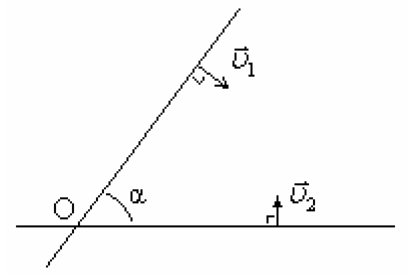
12. От причала вниз по реке отправили плот. Через $t = 3$ часа вслед за ним вышла лодка, скорость которой относительно воды равна $V = 9$ км/ч. Плот в этот момент находился на расстоянии $S = 12$ км от причала. На каком расстоянии от причала лодка догонит плот?

13. Ахилл начал догонять черепаху, когда она находилась на расстоянии 10 м от него. Пока Ахилл пробежал 10 м, черепаха убежала на 1 м. На каком расстоянии от точки старта Ахилл догонит черепаху? Считать, что Ахилл и черепаха – материальные точки, движущиеся равномерно и прямолинейно.

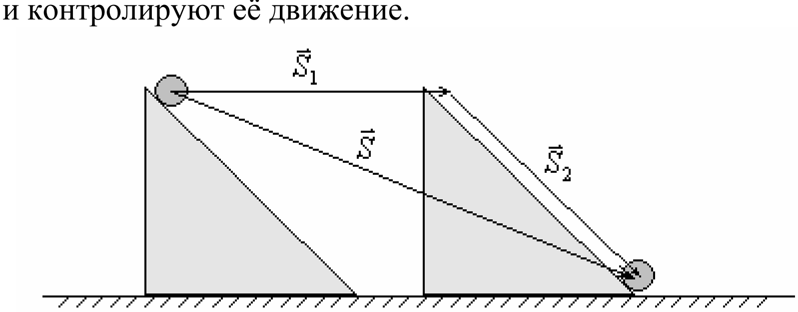
14. Школьники побывали в селе Константиново, родине Сергея Есенина, и возвращались в Рязань на автобусах. Автобусы ехали со скоростью $\upsilon_1 = 70$ км/ч. Пошёл дождь, и водители снизили скорость до $\upsilon_2 = 50$ км/ч. Когда дождь кончился, автобусы вновь поехали с прежней скоростью и въехали в Рязань на $\Delta t = 10$ минут позже, чем было запланировано. Сколько времени шёл дождь?

15. Школьники побывали в музее-заповеднике Ясная Поляна и возвращались в Рязань на автобусах. Автобусы ехали со скоростью $\upsilon_1 = 70$ км/ч. Пошёл дождь, и водители снизили скорость до $\upsilon_2 = 60$ км/ч. Когда дождь кончился, до Рязани оставалось проехать $S = 40$ км. Автобусы поехали со скоростью $\upsilon_3 = 75$ км/ч и въехали в Рязань точно в запланированное время. Сколько времени шёл дождь? Чему равна средняя скорость автобуса? Считайте, что автобусы в пути не останавливались.

16. Лодка проплыла из пункта А в пункт В по течению за время t_1 = 3 ч, а плот – за время t = 12 ч. За какое время лодка проплывёт это же расстояние против течения?
17. Стенки вагона поезда, движущегося со скоростью 72 км/ч, пробивает пуля, летящая перпендикулярно направлению движения вагона. Одно отверстие в стенках вагона смещено относительно другого на 6 см. Расстояние между стенками вагона равно 2,7 м. Какова была скорость пули? Считать, что стенки вагона настолько тонкие, что скорость пули не изменились после пробивания первой стенки.
18. Поезд длиной L_1 = 300 м переезжает через мост длиной L_2 = 400 м, двигаясь со скоростью υ = 35 км/ч. Сколько времени будет длиться переезд?
19. Автомобиль на первую треть пути затратил половину времени, а оставшуюся часть пути двигался со скоростью υ = 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.
20. При движении из пункта А в пункт В человек треть всего пути шёл со скоростью 4 км/ч, треть всего времени бежал со скоростью 9 км/ч, а оставшуюся часть пути и времени шёл со скоростью, равной средней скорости на всём пути. Найдите эту среднюю скорость.
21. Две прямые, пересекающиеся под углом α, движутся со скоростями υ_1 и υ_2 так, как показано на рисунке. С какой скоростью движется точка О пересечения этих прямых?



§ 5. Относительность движения и закон сложения скоростей
Движение всегда относительно. Скорость тела можно определить только по отношению к какой-то системе отсчёта.
Пусть имеются две системы отсчёта, движущиеся относительно друг друга с некоторой скоростью (например, система отсчёта, связанная со столом, и система отсчёта, связанная с наклонной плоскостью, см. рис.) По наклонной плоскости движется катушка с нитками. Выясним, как связаны между собой скорости тела (катушки) в двух разных системах отсчёта. Будем считать, что движение наклонной плоскости и катушки равномерно. Катушку поддерживают за отмотанный конец нитки (на рисунке не показан) и контролируют её движение.



Из рисунка видно, что $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Поделим обе части этого равенства на время Δt, за которое совершены перемещения:
$$\frac{\vec{S}}{\Delta t} = \frac{\vec{S}_1}{\Delta t} + \frac{\vec{S}_2}{\Delta t}$$
В соответствии с определением скорости, имеем:
$$\vec{\upsilon}_{\text{т.н}} = \vec{\upsilon}_{\text{п.н}} + \vec{\upsilon}_{\text{т.п}} \qquad (7)$$
Эта формула (закон сложения скоростей) читается так: *скорость тела относительно неподвижной системы отсчёта равна скорости тела относительно подвижной системы плюс скорости подвижной системы относительно неподвижной.*
Мы вывели формулу (7) для случая, когда движение равномерно. Но её можно вывести и для неравномерного движения. Для этого достаточно рассмотреть перемещения при Δt, стремящемся к нулю.

Здесь слова «подвижная» и «неподвижная» условны; они вводятся для удобства. На самом деле любую систему отсчёта можно назвать подвижной или неподвижной.

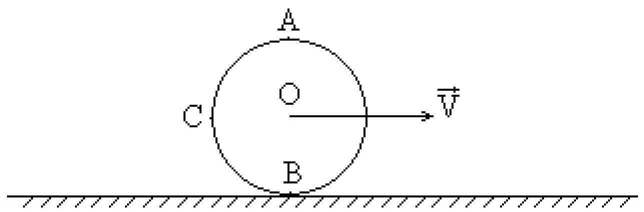
При решении научных и учебных задач иногда применяют приём под названием «переход в другую систему отсчёта». При этом используют закон сложения скоростей.

Задачи

22. Башенный кран движется относительно земли со скоростью υ_1 = 4 м/с и поднимает груз. Скорость груза относительно крана равна υ_2 = 3 м/с. С какой скоростью груз движется относительно земли?

23. Поезд длиной 900 м едет со скоростью 54 км/ч. Поезд догоняет мотоциклист, едущий вдоль путей со скоростью 72 км/ч. За какое время мотоциклист обгонит поезд?

24. Бочка катится по земле без проскальзывания, так, что её центр движется со скоростью V = 1 м/с. Найдите скорости точек A, B и C относительно земли.



25. По реке плывёт пароход длины L. Катер проходит расстояние от кормы до носа парохода и обратно за время t. Найдите скорость парохода относительно воды, если известно, что скорость катера относительно воды равна υ_0.

26. Скорость пловца относительно реки в 2 раза больше, чем скорость реки относительно берега. Пловец переплывает с одного берега на другой. Под каким углом к берегу относительно воды ему нужно плыть, чтобы его снесло на минимальное расстояние?

27. Лодочник перевозит пассажиров с берега на берег за t = 10 мин по траектории, перпендикулярной берегу. Скорость течения равна $\upsilon_{реки}$ = 0,3 м/с, а ширина реки равна L = 240 м. Под каким углом к берегу относительно воды плывёт лодка?

28. Скорость пловца относительно реки в 2 раза меньше, чем скорость реки относительно берега. Пловец переплывает с одного берега на другой. Под каким углом к берегу относительно воды ему нужно плыть, чтобы его снесло на минимальное расстояние?

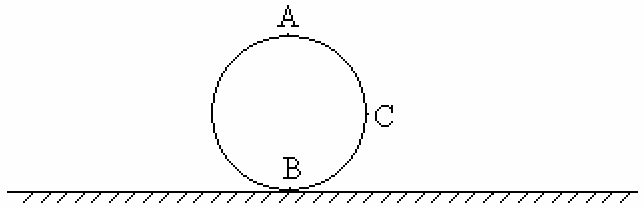
29. Командир вертолёта, летящего строго на север со скоростью υ_1 = 100 км/ч, заметил автомобиль. Ему кажется, что автомобиль движется строго на восток со скоростью υ_2 = 60 км/ч. С какой скоростью и каким азимутом (углом к направлению на север) движется автомобиль относительно земли?

30. При обработке детали на токарном станке скорость продольной подачи резца равна υ_1 = 12 см/мин, а скорость поперечной υ_2 = 5 см/мин. Найти скорость резца относительно земли.

31. Корабль держит курс строго на юг в системе отсчёта, связанной с землёй. На море присутствует восточное течение, скорость которого относительно земли равна υ. Под каким углом к направлению на юг относительно воды движется корабль, если его скорость относительно воды равна 2υ?

32. Заднее стекло автомобиля установлено под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Идёт дождь; капли дождя движутся равномерно и вертикально относительно земли. Водитель заметил, что капли перестают оставлять следы на заднем стекле, если скорость автомобиля превышает значение V = 60 км/ч. Найти скорость капель дождя относительно земли.

33. Колесо катится по земле с проскальзыванием. Скорость верхней точки относительно земли направлена вправо и равна υ_A = 6 м/с, а скорость нижней точки направлена влево и равна υ_B = 2 м/с. Найдите скорость точки C относительно земли.

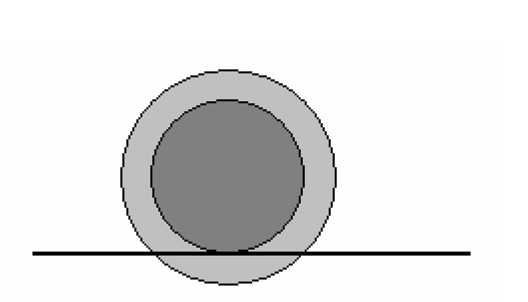


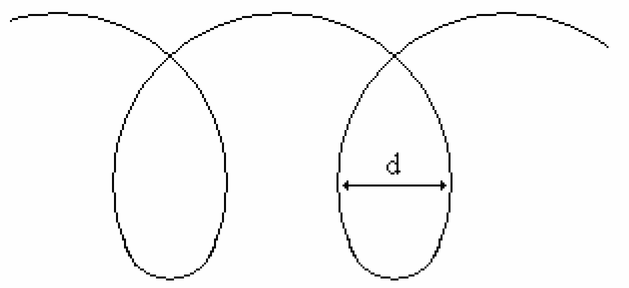
34. Два автомобиля приближаются к перекрёстку по перпендикулярным дорогам со скоростями υ_1 = 54 км/ч и υ_2 = 72 км/ч. В некоторый момент времени они находятся от перекрёстка на расстояниях S_1

= 80 м и S_2 = 60 м соответственно. Через какое время после этого момента расстояние между автомобилями будет минимальным? Чему равно это расстояние? Автомобили – материальные точки.

35. Три черепахи находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. В некоторый момент черепахи начинают ползти со скоростью υ, так, что первая черепаха всё время держит курс на вторую, вторая – на третью, а третья – на первую. За какое время черепахи сойдутся в одну точку? Черепахи – материальные точки.

36. Радиус реборды колеса вагона поезда немного больше радиуса той части колеса, которая соприкасается с рельсами. Радиус реборды равен R, а радиус соприкасающейся с рельсами части равен r. При движении поезда каждая точка реборды движется относительно земли по петляющей траектории. Найдите ширину петли d.





37. Самолёт летит горизонтально со сверхзвуковой скоростью υ = 420 м/с. Человек на земле услышал звук от самолёта спустя t = 14 с после того, как самолёт пролетел прямо над ним. На какой высоте летит самолёт? Скорость звука в воздухе равна $\upsilon_{зв}$ = 330 м/с.

§ 6. Движение с ускорением. Равноускоренное движение.

Если движение не является равномерным и прямолинейным, то вектор скорости (его модуль, направление или и то, и другое) меняется со временем. Для того чтобы описывать изменение скорости с течением времени, ввели ускорение. Понятие ускорения вводится по аналогии с понятием скорости. Скорость – это производная радиус-вектора по времени, а ускорение – это производная вектора скорости по времени. Такое понятие ускорения ввёл Исаак Ньютон (1643-1727).

Ускорение – это производная вектора скорости по времени.

Это обозначается так:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}, \text{ или } \vec{a} = \vec{\upsilon}'(t), \text{ или } \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad (8)$$

Ускорение $\vec{a}$ – векторная величина.

Движение тела называется равноускоренным (или равнопеременным), если вектор его скорости за любые равные промежутки времени изменяется на одинаковую векторную величину.

При равноускоренном движении скорость тела за любые равные промежутки времени изменяется одинаково. Поэтому для такого движения понятие ускорения можно ввести проще:

Ускорение тела при равноускоренном движении – это изменение скорости, делённое на время, за которое оно совершено:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} \qquad (9)$$

Этой формулой мы и будем пользоваться в данной теме. При решении задач мы для краткости вместо Δt писать просто t. Получим формулу для изменения скорости:

$\Delta \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0$

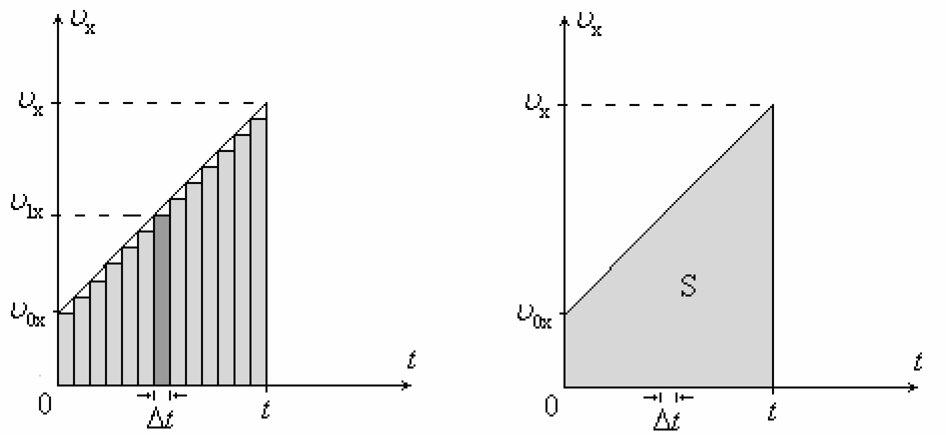
$\vec{a} = \dfrac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t}$. Выразим отсюда $\vec{\upsilon}$. Получим:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t \qquad (10)$$

Спроецируем это равенство на ось Ox (помним, что если справедливо векторное равенство, то справедливо и равенство проекций):

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t \qquad (11)$$

Формулы (10) и (11) позволяют найти скорость и проекцию скорости на ось Ox в любой момент времени, если известны начальная скорость и ускорение. А как найти координаты (или радиус-вектор) тела в любой момент времени, если известен радиус-вектор в начальный момент? Это более трудная и нестандартная задача. Её решил уже известный нам английский учёный Ньютон. Для решения построим график зависимости проекции скорости на ось Ox от времени. Из формулы (11) видно, что графиком будет прямая.



Разобьем промежуток времени от 0 до t на много маленьких промежутков величиной Δt. Так как каждый промежуток времени Δt маленький, то скорость тела на этом промежутке можно приближённо считать постоянной. Если скорость можно приближённо считать постоянной, то изменение координаты x за время Δt приближённо равно $\Delta x = \upsilon_{1x} \cdot \Delta t$, то есть равно площади прямоугольника со сторонами υ_{1x} и Δt. Значит, полное изменение координаты x за время от 0 до t приближённо равно сумме площадей всех закрашенных прямоугольников (рисунок слева).

Чем меньше интервал времени Δt, тем с большей точностью скорость на этом интервале можно считать постоянной, и тем с большей точностью полное изменение координаты равно сумме площадей закрашенных прямоугольников. Будем измельчать интервал времени от 0 до t, разбивая его на всё большее число маленьких отрезков. При этом Δt будет стремиться к нулю, а сумма площадей будет стремиться к точному значению изменения координаты. С другой стороны, когда Δt стремится к нулю, сумма площадей прямоугольников стремится к площади S фигуры под графиком (рисунок справа). Значит, **изменение координаты равно площади фигуры под графиком.** Только если часть графика лежит ниже оси t, то площадь фигуры, ограниченной той частью графика, нужно брать со знаком «минус».

Теперь мы легко можем вычислить изменение координаты при равноускоренном движении. Фигура под графиком – трапеция. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Основания трапеции равны υ_{0x} и υ_x, а высота равна t. Поэтому изменение координаты равно $\frac{\upsilon_x + \upsilon_{0x}}{2} t$. С другой стороны, изменение координаты равно проекции перемещения $\vec{S}$ на ось Ox. Получаем формулу:

$$S_x = \frac{\upsilon_x + \upsilon_{0x}}{2} t \qquad (12)$$

В задачах часто бывает неизвестна проекция конечной скорости υ_x, но зато известно ускорение. Подставим в формулу (12) значение υ_x, вычисленное по формуле (11). Получим:

$S_x = \frac{\upsilon_{0x} + a_x t + \upsilon_{0x}}{2} t$, или

$$S_x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \qquad (13)$$

Аналогичная формула справедлива для проекций перемещения на оси Oy и Oz. Если верно равенство всех проекций, то верно и векторное равенство. Значит, можно записать:

$$\vec{S} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2} \qquad (14)$$

Расписывая $\vec{S}$ как изменение радиус-вектора $\vec{r} - \vec{r}_0$, получим:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (15)$$

Иногда удобно бывает спроецировать это равенство на ось Ох. Получим:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \qquad (16)$$

Получим ещё одну важную формулу. Иногда бывает известно ускорение и проекции начальной и конечной скоростей, но неизвестно время движения. Выразим время из формулы (11) и подставим его в формулу (13). Получим:

$$S_x = \frac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x} \qquad (17)$$

Один из примеров равноускоренного движения – свободное падение. Вблизи поверхности Земли все тела, на которые действует только одна сила тяжести, движутся с одним и тем же ускорением, равным **g = 9,8 м/с^2.** Эта величина называется ***ускорением свободного падения.*** Свободное падение тел изучил великий итальянский учёный Галилео Галилей (1564-1642).

Задачи

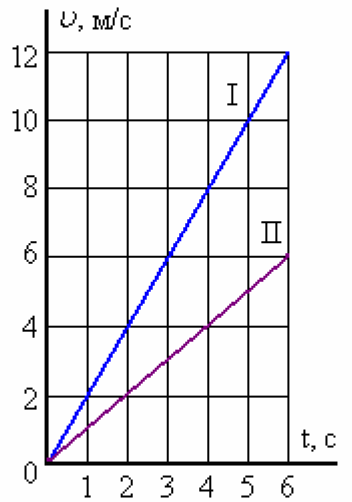
38. Какую скорость будет иметь яблоко, свободно падающее с дерева, спустя t = 1 с после отрыва от ветки? Какой путь пройдёт яблоко за это время? Сопротивлением воздуха пренебречь.

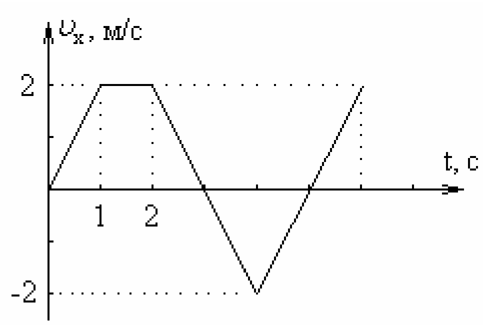
39. Троллейбус, трогаясь с места, движется с постоянным ускорением а = 1,5 м/с^2. За какое время он развивает скорость V = 54 км/ч?

40. Сосулька падает с крыши дома высотой h = 30 м. Сколько времени длится падение?

41. Мотоциклист трогается с места, двигаясь равноускоренно, и за пятую секунду такого движения проходит путь S = 22,5 м. Найдите ускорение мотоцикла.

42. Два тела движутся равноускоренно. На рисунке слева показаны графики зависимости их скоростей от времени. Определите, какое тело имеет большее ускорение, и найдите это ускорение.





43. На рисунке справа показана зависимость проекции скорости некоторого тела на ось x от времени. Постройте графики зависимости проекций ускорения и перемещения (то есть, a_x и S_x) от времени.

44. Велосипедист спускается с горки длиной L = 240 м, двигаясь равноускоренно. В начале спуска велосипедист имел скорость υ_0 = 5 м/с, а в конце спуска υ = 25 м/с. Сколько времени длился спуск? Сопротивлением воздуха пренебречь.

45. Стрела выпущена из лука вертикально вверх с начальной скоростью υ_0 = 80 м/с. На какую максимальную высоту поднимется стрела? Сопротивлением воздуха пренебречь.

46. Школьник пробежал дистанцию s = 30 м за t = 4,1 с, финишировав со скоростью v = 8,1 м/с. Первую часть пути он пробежал, двигаясь равноускоренно, а вторую часть – двигаясь равномерно. Чему равно ускорение на первой части пути? Решите задачу двумя способами: графически и аналитически (через формулы).

47. При равноускоренном движении скорость тела увеличилась от υ_0 = 1 м/с до υ = 7 м/с. Чему была равна скорость тела на середине пути?

48. Двигаясь равноускоренно, тело за 5 секунд проходит 30 см, а за следующие 5 секунд – 80 см. Найти начальную скорость и ускорение тела. Тело всё время движется в одну сторону.

49. Тело движется вдоль оси х так, что его координата зависит от времени по закону $x = 3t - 4t^2$, где координата измеряется в метрах, а время – в секундах. Чему равно ускорение тела?

50. Какую скорость имеет при подлёте к земле предмет, упавший с высоты h = 3,2 м?

51. Первый вагон поезда прошёл мимо наблюдателя, стоящего на платформе, за 1 с, а второй – за 1,5 с. Длина каждого вагона равна 12 м. Найдите ускорение поезда и его скорость в момент подхода к наблюдателю.

52. Свободно падающее тело прошло последние S = 30 м пути за время t = 0,5 с. С какой высоты упало тело?

53. Дети запустили новогоднюю ракету и услышали её взрыв через t = 1,13 с. Ракета летела вертикально и взорвалась немного раньше времени, когда из неё ещё вырывалась струя газов. На какой высоте над землёй взорвалась ракета? Считать, что при подъёме ракета движется с постоянным ускорением $a = 12\,\text{м/с}^2$. Учесть конечность скорости звука: она равна υ = 320 м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

54. Две дождевые капли упали с крыши дома с интервалом времени τ = 1 с. Когда первая капля достигла земли, вторая находилась на высоте h = 10 м над землёй.

1. Определите высоту дома.
2. Докажите, что скорость движения капель относительно друг друга во время падения постоянна, и найдите эту скорость. Ускорение свободного падения считать равным g = 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

55. У головы первого вагона стоящего на станции поезда стоит наблюдатель. Поезд трогается и отправляется в путь, а наблюдатель стоит на месте. Первый вагон прошёл мимо наблюдателя за 15 с, а второй – за 9 с. Является ли движение поезда равноускоренным? Длины вагонов одинаковы.

56. Турист увидел, как с пальмы упал кокос. Он рассчитал среднюю скорость кокоса за время падения, и она оказалась равной $\upsilon_{\text{ср}}$ = 5 м/с. Определите высоту пальмы.

57. Тело бросили вертикально вниз, сообщив ему скорость υ_0 = 10 м/с. За какое время тело пройдёт путь S = 60 м? Сопротивлением воздуха пренебречь.

58. За какую секунду от начала движения путь, пройденный телом при равноускоренном движении, в 3 раза больше пути, пройденного за предыдущую секунду?

59. Тело, подброшенное вертикально вверх, прошло путь S = 20 м за время t = 5 с. Через какое время после броска тело остановится, достигнув наивысшей точки подъёма? Сопротивлением воздуха пренебречь.

60. Свободно падающее тело за последнюю секунду падения прошло одну треть пути. Найдите полное время падения и высоту, с которой упало тело.

61. Два тела начинают движение из одной точки в одну сторону по одной прямой. Первое тело движется с постоянной скоростью V = 100 м/с, а второе – с постоянным ускорением a = 10 м/с^2. За какое время второе тело догонит первое?

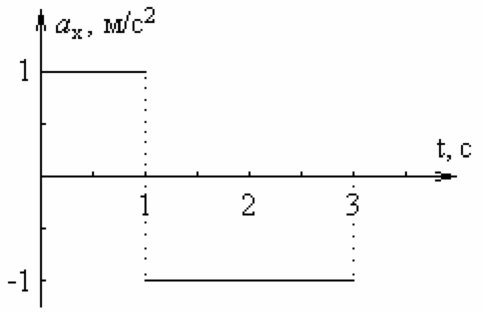
62. Изучая свободное падение тел, Галилео Галилей отпускал разные шары с Пизанской башни. Путь, который проходили шары при падении на землю, равен S = 56 м. Разделите этот путь на две части, так, чтобы на прохождение каждой части шары затрачивали одинаковое время (вычислите длину каждой части). Сопротивлением воздуха пренебречь.

63. На рисунке изображён график зависимости проекции ускорения тела на ось Ох от времени. Известно, что начальная скорость этого тела равна нулю. Постройте график зависимости от времени

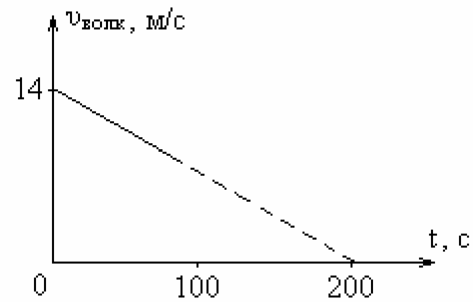
а.) проекции скорости тела на ось Ох,

б.) проекции перемещения тела на ось Ох,

в.) пути, пройденного телом.



64. Заяц убегает от волка, двигаясь равномерно и прямолинейно со скоростью V = 12 м/с. В начальный момент времени расстояние между зайцем и волком равно S = 30 м, а скорость волка равна υ_0 = 14 м/с. Но волк «выдыхается», и его скорость линейно убывает со временем, так, как показано на графике. Догонит ли волк зайца?



65. Мальчик вышел на балкон, слепил снежок и бросил его вертикально вверх, высунув руку в балконное окно. Спустя t = 1 с после бросания снежок имел скорость υ = 6 м/с, а путь, пройденный снежком за это время, был равен S = 6 м.

1. Определите и нарисуйте взаимное расположение точки бросания, точки наивысшего подъёма и точки, в которой находился снежок спустя t = 1 с.
2. Найдите начальную скорость снежка. Ускорение свободного падения считать равным g = 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

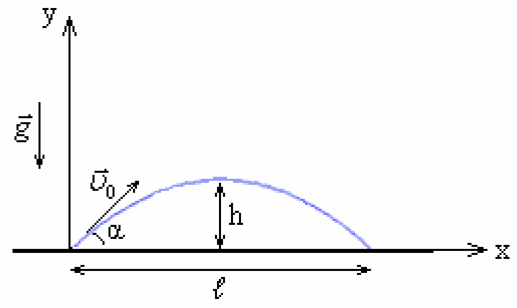
66. Тело движется вдоль оси Ox так, что a_x = 1 м/с^2, а υ_{0x} = –3 м/с. Найти путь, пройденный телом спустя t = 4 с после начала движения.

67. Мальчик подошёл к последнему вагону электрички в тот момент, когда электричка тронулась и начала двигаться с постоянным ускорением a. Ближайшая открытая дверь электрички оказалась от мальчика на расстоянии S. С какой минимальной постоянной скоростью должен бежать мальчик, чтобы успеть сесть в электричку? Считать, что эта скорость мальчика развивается мгновенно.

§ 7. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

В задачах предыдущего параграфа мы рассматривали равноускоренное прямолинейное движение. Теперь рассмотрим равноускоренное криволинейное движение. Футбольный мяч после удара или баскетбольный мяч после броска движется с постоянным ускорением (ускорением свободного падения $\vec{g}$), но не по прямой. Все формулы, которые нам потребуются, мы уже вывели в §4. Осталось только научиться применять их для случая криволинейного движения.

Рассмотрим задачу. Тело бросают от поверхности земли, сообщив ему начальную скорость $\vec{\upsilon}_0$, направленную под углом α к горизонту. Введём систему координат xOy, так как показано на рисунке.



Найти:
1. Зависимость координат тела от времени,
2. Время полёта,
3. Дальность полёта,
4. Максимальную высоту подъёма,
5. Уравнение траектории.

Применим формулы (11) и (16), чтобы найти зависимость проекций скорости и координат от времени. Имеем:

$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + g_x t$, $\upsilon_y = \upsilon_{0y} + g_y t$

$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \dfrac{g_x t^2}{2}$, $y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \dfrac{g_y t^2}{2}$

Запишем, чему равны проекции ускорения и начальной скорости на координатные оси.

$g_x = 0$, так как вектор $\vec{g}$ перпендикулярен оси Ox (координаты его начала и конца по оси Ox совпадают).

$g_y = -g$, так как вектор $\vec{g}$ направлен в сторону, противоположную оси Oy.

$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$,

$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$. Эти равенства следуют из рассмотрения прямоугольных треугольников (см. §1).

Подставим эти значения в формулы:

$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha$ (18)

Проекция скорости но ось Ox не зависит от времени (если мы посмотрим на движение тела сверху с большой высоты, то нам будет казаться, что тело движется равномерно). Неизменность какой-либо физической величины обозначают так: $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = const$ (читается «равно константе»).

$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$, (19)

$x = x_0 + \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$, (20)

$y = y_0 + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$. (21)

Если $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ (как в нашем случае), то получаем:

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Первая часть задачи решена. Теперь найдём **время полёта.** Это можно сделать двумя способами. Способ первый. В момент, когда тело приземлилось, его координата y стала равна нулю. Поэтому можно записать уравнение $\upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_п - \dfrac{gt_п^2}{2} = 0$ и найти из него время полёта $t_п$. Уравнение имеет два корня, один из которых равен нулю и нам не подходит, а второй подходит.

Способ второй. Найдём сначала время подъёма тела t_1 до наивысшей точки траектории. В наивысшей точке скорость направлена горизонтально, поэтому её проекция на ось Oy равна нулю. Имеем:

$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$,

$0 = \upsilon_0 \sin\alpha - gt_1$, откуда $t_1 = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$. Это время подъема. В силу симметрии, время спуска равно времени подъёма. Поэтому полное время полёта $t_п$ в 2 раза больше, чем время подъёма:

$$t_п = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} \qquad (22)$$

Зная время полёта, легко найти **дальность полёта** ℓ.

$x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$,

$l = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_п = \dfrac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

$$l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (23)$$

Зная время подъёма, легко найти **максимальную высоту подъёма** *h*.

$y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$,

$h = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \dfrac{gt_1^2}{2} = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} - \dfrac{g \cdot \upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

$$h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad (24)$$

Зная зависимость координат и проекций скоростей от времени, можно найти скорость в заданный момент времени, скорость на любой высоте и другие характеристики движения. Можно найти, например, под каким углом к горизонту направлена скорость тела в заданный момент времени или в заданной точке траектории. Обозначим этот угол как β. Рассматривая прямоугольный треугольник, составленный из вектора скорости и его проекций, легко получить, что его тангенс равен

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} \qquad (25)$$

Тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе. Как это доказать? Для этого нужно получить уравнение траектории.

Уравнение траектории – это уравнение, связывающее между собой координаты тела (материальной точки) в каждой точке траектории.

Как его получить? У нас есть зависимости координат x и y от времени:

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Из первого уравнения можно выразить время *t*: $t = \dfrac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha}$. Подставим это выражение во второе уравнение. После преобразований получим:

$$y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} \qquad (26)$$

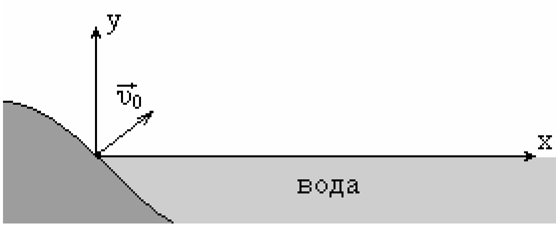
Получили квадратичную функцию. Графиком квадратичной функции является парабола. Значит, тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе. Конечно, всё это справедливо лишь в том случае, если сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Задачи

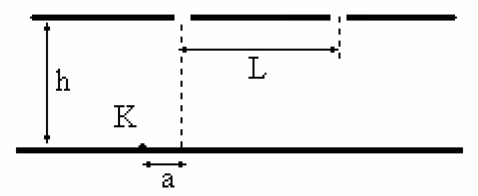
Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

68. Стоя на краю обрыва, турист бросил камень в горизонтальном направлении, сообщив ему скорость υ_0 = 15 м/с. Введите систему координат, связанную с землёй, в которой удобно описывать движение камня. Найдите координаты камня и его скорость спустя t = 2 с после броска.

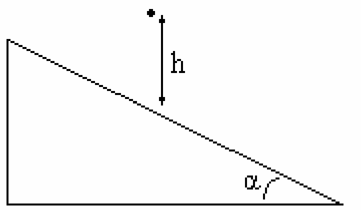
69. Со стола высотой $h = 1$ м столкнули маленький грузик, сообщив ему скорость $\upsilon_0 = 3$ м/с, направленную горизонтально. На каком расстоянии от стола грузик достигнет пола?
70. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Найдите модуль и направление скорости тела спустя время t после броска.
71. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Какую скорость имело тело на высоте h над землёй, если известно, что оно достигло этой высоты?
72. Футбольный мяч послан под углом $\alpha = 45°$ к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. Найдите дальность полёта, максимальную высоту подъёма, а также скорость мяча в верхней точке траектории.
73. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело, чтобы максимальная высота подъёма была в 4 раза больше дальности полёта?
74. Ядро вылетает из ствола пушки со скоростью $\upsilon_0 = 50$ м/с. Под каким углом к горизонту нужно стрелять, чтобы дальнобойность была максимальной? Чему равна дальнобойность? Местность горизонтальная, сопротивлением воздуха пренебречь.
75. Снайпер стреляет из винтовки по мишени, находящейся на расстоянии $l = 600$ м от него. Пуля вылетает из ствола винтовки, направленного горизонтально, со скоростью $\upsilon_0 = 800$ м/с. Чему равно отклонение пули вниз от прямолинейной траектории? Сопротивлением воздуха пренебречь.
76. Рыбак, стоящий на крутом берегу реки высотой $h = 3$ м, забрасывает блесну под углом $\alpha = 45°$ к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 14$ м/с. Определите, сколько времени блесна будет лететь до воды и на каком расстоянии от берега она достигнет воды. Сопротивлением воздуха и лески пренебречь.
77. Баскетболист бросает мяч под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, находясь на расстоянии $l = 5$ м от корзины. Максимальная высота подъёма мяча над точкой бросания была равна $h = 4$ м. Мяч попал в корзину, но спустя ровно $t = 1$ с после броска прозвучала сирена, означающая конец матча. Успел ли мяч попасть в корзину до окончания матча? Ускорение свободного падения в этой задаче считать равным $g = 9{,}8$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.
78. Рыбак, стоящий на крутом берегу реки высотой $h = 3$ м, забрасывает блесну под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Определите начальную скорость блесны, если дальность её полёта в горизонтальном направлении равна $L = 90$ м. Трением лески и сопротивлением воздуха пренебречь.
79. Из шланга, конец которого удерживают близко к земле, течёт струя воды. Конец шланга образует угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, а скорость воды на выходе из него равна $\upsilon_0 = 10$ м/с. Площадь поперечного сечения шланга равна $S = 5$ см^2. Найдите массу находящейся в воздухе воды. Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м^3.
80. Находясь на расстоянии l от ворот, футболист посылает мяч со скоростью υ_0 в плоскости, перпендикулярной плоскости ворот. Мяч попадает в верхнюю перекладину. Под каким углом к горизонту был послан мяч? Высота ворот известна и равна h.
81. Мальчик, находясь на расстоянии $L = 6$ м от вертикальной стены, ударяет по футбольному мячу, сообщая ему скорость $\upsilon_0 = 10$ м/с, направленную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Плоскость, в которой движется мяч, перпендикулярна стене. Мяч отражается от стены абсолютно упруго. На каком расстоянии от мальчика упадёт мяч? Сопротивлением воздуха пренебречь.
82. Однажды летним утром кузнечик сидел на асфальте. Когда солнце поднялось на угол $\varphi = 30°$ над горизонтом, он прыгнул в сторону солнца с начальной скоростью $\upsilon_0 = 6{,}3$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найдите скорость тени кузнечика сразу после прыжка и спустя $t = 0{,}6$ с после прыжка.
83. Находясь на склоне горы, образующей угол $\varphi = 30°$ с горизонтом, мальчик бросает камень с начальной скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту в сторону подъёма горы. На каком расстоянии от мальчика упадёт камень?
84. Жонглёр подбрасывает апельсины одной рукой и ловит другой. Время полёта каждого апельсина равно $t = 1$ с. На какую высоту над уровнем рук подлетают апельсины?
85. Тело движется по параболе, описываемой уравнением $y = \alpha x - \beta x^2$ под действием только силы тяжести. Найдите начальную скорость тела (в точке $x = 0$, $y = 0$), если коэффициенты α и β известны.
86. Лягушка, сидевшая на берегу болота почти у самой воды, прыгнула в воду. Известно, что максимальная высота подъёма лягушки над поверхностью воды равна $h_{max} = 20$ см, а её скорость в верхней точке траектории равна $\upsilon = 4$ м/с. Найдите зависимость расстояния между лягушкой и её изображением в воде от координаты лягушки x.



87. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело из точки K, чтобы оно прошло через два отверстия в потолке, так, как показано на рисунке? Размеры h, a и L известны.



88. Шарик падает с высоты h на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, и отражается от неё абсолютно упруго. Через какое время после удара шарик снова упадёт на плоскость?

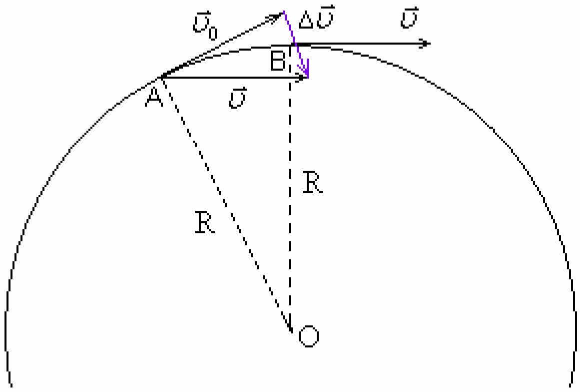


89. В воздухе разрывается снаряд, и его осколки разлетаются по всем направлениям с одинаковыми начальными скоростями. Осколок, полетевший вертикально вверх, достиг земли спустя время t_1. Осколок, полетевший вертикально вниз, достиг земли спустя время t_2. Сколько времени падали осколки, полетевшие горизонтально? Сопротивлением воздуха пренебречь.
90. Поезд едет со скоростью V = 54 км/ч. На конце крыши заднего вагона сидят Чебурашка и крокодил Гена. Чебурашка держит в руке камень, который при этом находится на высоте h = 3,6 м над землёй. Проезжая мимо столба № 263, Чебурашка бросил камень назад по ходу поезда со скоростью υ_0 = 12 м/с под углом α = 30° к горизонту относительно поезда. На каком расстоянии от столба № 263 упадёт камень? Сопротивлением воздуха пренебречь.
91. Телега, радиус колёс которой равен R, едет со скоростью υ. На какую максимальную высоту над полотном дороги могут подлететь брызги, отрывающиеся от колёс? Колёса не проскальзывают.
92. На земле лежит цилиндр радиуса R (ось цилиндра горизонтальна). С какой минимальной скоростью нужно подкинуть камень от поверхности земли, чтобы он перелетел через цилиндр?
93. Человек бросает камень. Под каким максимальным углом к горизонту можно направить начальную скорость камня, чтобы он в течение всего времени движения удалялся от точки бросания?

§ 8. Движение по окружности. Центростремительное ускорение

При криволинейном движении направление вектора скорости всегда меняется, даже если его модуль – постоянный. Действительно, *вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории*, а направление этой касательной в различных точках различно. Значит, криволинейное движение – это всегда движение с ускорением. Если скорость по модулю постоянна, то такое движение называют равномерным криволинейным.

Рассмотрим равномерное движение по окружности. Выясним, как направлено ускорение при таком движении и чему оно равно.



Ускорение находится по формуле $\vec{a} = \dfrac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t} = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{t}$ (точнее, это предел отношения $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{t}$ при $t \to 0$). Из этого равенства видно, что ускорение направлено в ту же сторону, в какую и вектор $\Delta\vec{\upsilon}$. Пусть тело перешло из точки А в точку В за очень малый промежуток времени *t*. Будем считать, что точки А и В так близки, что $\cup\mathrm{AB} = \mathrm{AB}$. Построим вектор $\Delta\vec{\upsilon}$. Для этого перенесём вектор $\vec{\upsilon}$ параллельно самому себе, так, чтобы он исходил из точки А, и соединим концы векторов $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{\upsilon}$. Видим, что вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ направлен внутрь окружности. Если точки А и В будут предельно близки друг к другу, то вектор $\Delta\vec{\upsilon}$, перенесённый в точку А, будет направлен к центру окружности. Туда же будет направлен и вектор $\vec{a}$. *Ускорение тела, равномерно движущегося по окружности, в любой её точке* ***центростремительное****, т.е. направлено к центру.*

Чтобы найти модуль этого ускорения, рассмотрим треугольник ОАВ и треугольник, состоящий из векторов $\vec{\upsilon}_0$, $\vec{\upsilon}$ и $\Delta\vec{\upsilon}$. Оба они равнобедренные: ОА = ОВ (радиус) и $\upsilon_0 = \upsilon$. Углы при их вершинах равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами ($\vec{\upsilon}_0 \perp \mathrm{OA}$ и $\vec{\upsilon} \perp \mathrm{OB}$). Поэтому эти треугольники подобны по двум сторонам и углу между ними. Из подобия треугольников следует пропорциональность сходственных сторон:

$$\frac{\Delta\upsilon}{\mathrm{AB}} = \frac{\upsilon}{\mathrm{R}}$$

Если точки А и В очень близки друг к другу, то хорда АВ неотличима от дуги АВ. Длина дуги АВ равна $\cup\mathrm{AB} = \upsilon t$, т.к. движение равномерное. Имеем: $\dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon t} = \dfrac{\upsilon}{\mathrm{R}}$, или $\dfrac{\Delta\upsilon}{t} = \dfrac{\upsilon^2}{\mathrm{R}}$. Так как промежуток времени *t* очень мал, то $\dfrac{\Delta\upsilon}{t}$ – это модуль ускорения. Мы получили, что

$$a = \frac{\upsilon^2}{\mathrm{R}} \qquad (27)$$

Это и есть формула для центростремительного ускорения.

§ 9. Угловая скорость. Частота и период обращения

Введём несколько важных понятий.

Период обращения Т – это время, за которое тело, движущееся по окружности, совершает один полный оборот.

Частота обращения ν – это число оборотов, совершаемых телом при движении по окружности в единицу времени.

За t секунд тело совершает N = νt оборотов. Положим N = 1. Тогда, по определению периода, t = T. Получаем связь частоты с периодом: νT = 1, или $\nu = \dfrac{1}{\mathrm{T}}$. Отсюда видно, что частота измеряется в c^{-1}.

Из определения скорости и формулы для длины окружности легко получить выражения для скорости и центростремительного ускорения:

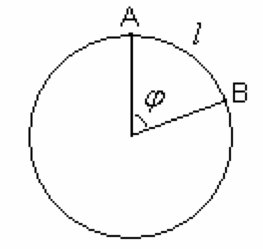
$\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T}$, $\qquad \upsilon = 2\pi R\nu$,

$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$, $a = 4\pi^2 \nu^2 R$.

Углом поворота радиуса φ называется угол, на который поворачивается радиус, соединяющий центр окружности с телом, движущимся по окружности. Угол поворота измеряется в радианах и вычисляется по формуле

$$\varphi = \frac{l}{R} \qquad (28)$$

Напомним, что один радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, равную радиусу окружности R. Угол величиной φ радиан опирается на дугу, равную l = φR. Разделив обе части этого равенства на R, получим формулу (28).



Угловая скорость ω – это отношение угла поворота ко времени, за которое совершён этот поворот:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \qquad (29)$$

Получим связь между обычной (линейной) скоростью и угловой скоростью.

l = Rφ; $\upsilon = \frac{l}{t} = \frac{R\varphi}{t} = R\omega$.

$$\upsilon = R\omega \qquad (30)$$

Комбинируя формулы (27) и (30), можно получить:

$a = \frac{\upsilon^2}{\mathrm{R}} = \omega^2 \mathrm{R} = \upsilon\omega$

Получим ещё связь между угловой скоростью и частотой обращения:

$\upsilon = \frac{2\pi R}{T}$, $\upsilon = R\omega$, $\frac{2\pi R}{T} = R\omega$, откуда получаем

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (31)$$

В заключение отметим, что движение по любой криволинейной траектории можно представить как движение по бесконечно малым дугам окружностей. Таким образом, задачу описания криволинейного движения можно свести к задаче описания движения по окружности. При этом ускорение тела бывает удобно разложить на две составляющие: *тангенциальную и нормальную* (любой вектор на плоскости можно разложить на две перпендикулярные составляющие). Тангенциальная составляющая параллельна вектору скорости, а нормальная перпендикулярна ему. Нормальная составляющая – это и есть центростремительное ускорение.

Задачи

94. Автомобиль движется по закруглению дороги радиусом R = 100 м со скоростью V = 54 км/ч. Чему равно центростремительное ускорение автомобиля?

95. Чему равен минимальный радиус окружности, по которому может двигаться автомобиль со скоростью V = 72 км/ч, если полотно дороги позволяет создать центростремительное ускорение, не превышающее a = 8 м/с^2?

96. Велосипедист движется по окружности радиуса r = 12 м с центростремительным ускорением a = 3 м/с^2. Чему равна скорость велосипедиста?

97. Является ли равномерное движение по окружности равноускоренным движением?

98. Мальчик крутит игрушечный самолёт, держа его нитку. Самолёт совершает N = 5 оборотов за время t = 15 с. При этом его центростремительное ускорение равно a = 12 м/с^2. Чему равен радиус окружности, по которой движется самолёт?

99. За какое время тело, двигаясь по окружности радиуса R с постоянным по модулю ускорением a, совершит N полных оборотов?

100. Земля движется по своей орбите со скоростью V = 30 км/с, совершая полный оборот за 1 год. По этим данным найдите центростремительное ускорение Земли.

101. Два тела движутся по разным окружностям с одинаковой угловой скоростью. Радиус первой окружности в 4 раза меньше радиуса второй. Скорость какого из тел больше и во сколько раз?

102. Как изменится скорость движения тела по окружности, если радиус уменьшить в 4 раза, а центростремительное ускорение оставить прежним?

103. Два тела равномерно движутся по разным окружностям. Ускорение первого тела в n раз меньше ускорения второго, а период обращения первого тела в m раз больше периода второго. Найдите отношение радиусов окружностей.

104. Стрелки часов движутся с постоянными угловыми скоростями. Найдите отношение угловых скоростей часовой, минутной и секундной стрелок.

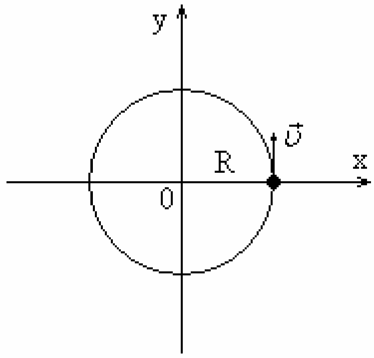
105. Выведите самостоятельно формулу связи угловой скорости с периодом обращения:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

106. Стоя на краю обрыва, турист бросил камень в горизонтальном направлении, сообщив ему скорость υ_0 = 15 м/с. Найдите радиус кривизны траектории камня в точке, в которой он находился спустя t = 2 с после броска.

107. Сколько раз пересекаются минутная и часовая стрелки за время от 00 час 05 мин одного дня до 00 час 05 мин следующего дня?

108. Маленький шарик равномерно движется по окружности радиуса R со скоростью υ. На рисунке показано положение шарика в начальный момент времени. Найдите зависимость координат шарика от времени во введённой на рисунке системе координат.



Глава 2. Динамика

В главе «Кинематика» мы изучали способы математического описания движения. Рассматривая движение тел, мы не ставили вопрос **почему** тела движутся именно так, а не иначе. Почему яблоко, упавшее с дерева, движется равноускоренно, а капли дождя движутся равномерно (почти с постоянной скоростью)? Точнее, от чего зависит движение тела и как предсказать, как будет двигаться тело в той или иной ситуации? На эти вопросы отвечает динамика.

Динамика – раздел механики, в котором изучаются законы движения тел под действием приложенных к ним сил.

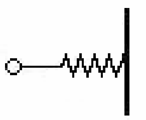
Множество наблюдений показывает, что *причиной ускорения тела является действие на него других тел.* Чтобы разогнать телегу или сани (то есть, увеличить их скорость от нуля до какого-то значения), их нужно тянуть или толкать.

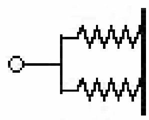
Как будет двигаться тело, если на него совсем не будут действовать другие тела? Ответ на этот вопрос дал великий итальянский учёный Галилео Галилей (1564-1642): ***если на тело не действуют другие тела, то оно либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.*** Такое движение называют движением по инерции. Реально на любое тело почти всегда действуют другие тела. Телега или сани без лошади останавливаются, потому что на них действует сила трения. Великий английский учёный Исаак Ньютон (1643-1727) развил и уточнил идеи Галилея и сформулировал законы движения, которые мы изучим в этой главе.

§ 10. Сила

В физике часто не указывают, какое тело и как действует на данное тело, а говорят, что **на тело действует сила** или к **телу приложена сила**. Понятие силы вводится потому, что так удобнее описывать физические явления.

Сила – одна из основных физических величин. Её определение не даётся через другие величины (как например средняя скорость – путь, делённый на время). Представление о силе мы получаем интуитивно, как например представление о длине и времени. Допустим, у нас есть пружина. Один конец мы закрепили, а на другом конце есть кольцо (рис. слева). Мы потянули рукой за кольцо, немного растянув пружину.





Действие пружины на руку похоже на действие мышц человека. Ведь вместо пружины за кольцо мог тянуть другой человек, и мы бы почувствовали то же самое. Поэтому такое действие называют силой.

Теперь соединим кольцо с двумя такими же пружинами и растянем их на такую же длину, как в первом случае (рис. справа). Интуитивно ясно, что сила, действующая на руку со стороны кольца, в два раза больше, чем в первом случае. Если пружины три – сила в три раза больше, и т.д. Значит, силу можно измерять.

Действие силы зависит не только от её величины, но и от её направления. В зависимости от направления силы пружина будет растягиваться или сжиматься, дверь открываться или закрываться. Поэтому **сила – векторная величина.**

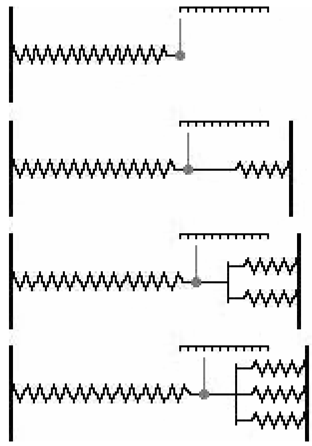
Большое значение имеет то, **к какой точке тела приложена сила.** Ручку двери прикрепляют как можно дальше от петель. Попробуйте открыть дверь, толкая её близко от петель, – это сделать труднее, чем открывать дверь за ручку. Учитывая всё сказанное, можно дать такое определение:

Сила – это мера действия одного тела на другое. Это векторная величина, имеющая модуль, направление и точку приложения. Силу будем обозначать буквой $\vec{F}$.

Теперь, когда известно, что такое сила, можно экспериментально установить так называемый **закон Гука.** На верхнем рисунке – нерастянутая пружина. На втором сверху рисунке к этой пружине приложили силу, и она растянулась на одно деление линейки. Затем приложили в 2 раза большую силу, и она растянулась на два деления линейки. И так далее. Приходим к выводу, что приложенная к пружине сила пропорциональна удлинению пружины:

$$F = kx,$$

где x – удлинение, а k – коэффициент пропорциональности. Он постоянный для данной пружины (если не слишком сильно растягивать) и называется *коэффициентом жёсткости пружины.*



Так мы нашли простой способ измерять силу. Выбрав какую-нибудь силу за эталон, можно измерять другие силы с помощью пружины.

Приборы для измерения силы называются динамометрами. Простейший динамометр – пружинный динамометр. Чтобы измерять силу, нужно проградуировать динамометр (проградуировать прибор – значит нанести на него шкалу с делениями). Но сначала нужно выбрать эталон силы.

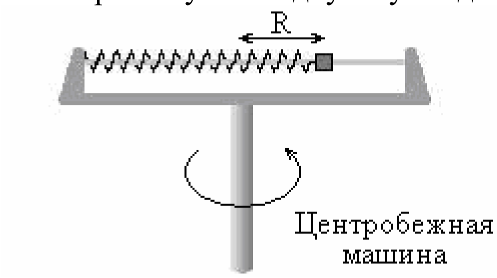
Какую же силу удобно выбрать за эталон? Это мы узнаем в следующем параграфе.

§ 11. Первый и второй законы Ньютона

Как связано действие силы на тело с изменением скорости тела? Ответ на этот вопрос можно получить из наблюдений или опытов. Именно это и сделал Ньютон в XVII веке. Нам потребуется измерять ускорение тела. Легче всего измерять центростремительное ускорение. Оно равно $4\pi^2\nu^2R$, где ν – частота обращения. Рассмотрим два опыта с *центробежной машиной*. Машина вращается в сторону, показанную стрелкой.

В первом опыте поместим некоторое тело (цилиндр) на стержень машины и прикрепим к нему пружину. Меняя ν, будем строить *график зависимости силы от ускорения*. Окажется, что $F = Ka$, где K – некоторый коэффициент, зависящий от тела и от выбора единицы силы; a – ускорение.

Во втором опыте *будем брать разные тела, но силу делать всегда одинаковой*. Будем подбирать ν так, чтобы пружина всегда была растянута на одну и ту же длину.



Если тело, например, сжать или нагреть, коэффициент K не изменится. Но второй опыт покажет, что для всех тел одинаковой будет величина ma, где m – **масса**, та величина, которую люди издавна измеряют взвешиванием. Если изменить силу, величина ma изменится. Значит, ma зависит от силы (является функцией силы). Теперь видно, что K включает в себя массу:

$$F = qma,$$

где q – коэффициент, не зависящий ни от тела, ни от силы. *Он зависит только от выбора единиц силы.* Удобнее всего выбрать q = 1, причём чтобы q не имел размерности. В этом случае единицей силы в СИ будет $\frac{1\,кг\cdot 1\,м}{1\,с^2}$, т.е. она выражена через единицы длины, времени и массы. Итак, единицу силы выбрали таким образом, что $\vec{F} = m\vec{a}$ (сила и ускорение – векторные величины). Эта единица силы называется *ньютон* (обозначается Н). Множество опытов показывает, что ***если на тело действует несколько сил, то под $\vec{F}$ надо понимать их векторную сумму.*** Например, мы могли бы закрепить на центробежной машине две пружины, тянущие тело в разные стороны, и мы бы подтвердили это.

Но вспомним о том, что движение относительно. Рассмотрим, например, кирпич, лежащий на земле. Относительно Земли (нашей планеты) он неподвижен, т.е. окружающие тела не изменяют его скорость. Но если мы будем проезжать мимо этого кирпича на поезде, который меняет свою скорость относительно Земли (разгоняется или тормозит), то мы увидим, что скорость кирпича относительно поезда меняется со временем. Получается, что скорость кирпича относительно Земли не меняется, а относительно поезда меняется. Равенство $\vec{F} = m\vec{a}$ не выполняется в системе отсчёта, связанной с поездом. Из таких рассуждений Ньютон сделал вывод, что *нужно различать системы отсчёта.* Ускорение материальной точки возникает только из-за действия на неё других тел не во всех системах отсчёта, а в таких, где любая материальная точка движется без ускорения, если действие других тел скомпенсировано.

Первый закон Ньютона утверждает, что такие системы есть:

Существуют системы отсчёта, в которых любая материальная точка или поступательно движущееся тело сохраняет свою скорость постоянной (по модулю и направлению), если на неё не действуют другие тела или действие всех тел скомпенсировано.

Такие системы называются <u>инерциальными.</u> Вместо слов “не действуют другие тела или действие всех тел скомпенсировано” можно сказать “векторная сумма всех действующих на неё сил равна нулю”.

<u>Замечание 1.</u> Как убедиться в том, что действия всех тел на данную точку скомпенсированы? Об этом нельзя судить по отсутствию ускорений, т.к. равенство $\vec{F} = m\vec{a}$ имеет место лишь в инерциальных системах отсчёта (ИСО), но чтобы выбрать ИСО, нужно сначала убедиться, что действие всех тел на какое-то одно тело (или точку) скомпенсировано. *Строгого ответа на этот вопрос нет*. Можно с большой уверенностью считать, что если точка удалена от других тел на очень большое расстояние, на неё не действуют другие тела. Примеры таких точек – звёзды. Огромное число опытов показывает, что для описания большинства процессов на Земле земную систему отсчёта можно приближённо считать инерциальной.

<u>Замечание 2.</u> В земной системе отсчёта звёзды движутся с большими центростремительными ускорениями. Значит, для описания движения звёзд земную систему отсчёта нельзя считать инерциальной. Для звёзд нашей галактики инерциальной можно считать систему Коперника. Это система с началом координат в центре Солнца, две оси которой направлены на далёкие звёзды. Стороны треугольника, который эти звёзды образуют с Солнцем, не должны меняться со временем (они могут меняться очень медленно). Но при рассмотрении движений всей галактики или нескольких галактик эта система уже не будет инерциальной. *Любая известная система отсчёта может считаться инерциальной лишь для определённой группы объектов*. Отметим, что если выбрана одна ИСО, то любая другая система отсчёта, неподвижная в ней или движущаяся относительно неё равномерно и поступательно, также является инерциальной.

Латинское слово inertia (инерция) означает “лень”. В физике *инерция* – явление сохранения скорости материальной точки постоянной, если векторная сумма сил, действующих на неё, равна нулю. Ещё выделяют *свойство инертности*. Оно состоит в том, что для изменения скорости материальной точки требуется некоторое время. Чем больше приложенная сила, тем оно меньше. Но *скорость тела нельзя изменить мгновенно*.

Теперь мы знаем, в каких системах отсчёта выполняется равенство $\vec{F} = m\vec{a}$, установленное в опытах с центробежной машиной. Сформулируем **второй закон Ньютона.**

В инерциальных системах отсчёта ускорение $\vec{a}$ материальной точки или поступательно движущегося тела, его масса m и векторная сумма $\vec{F}$ всех приложенных к нему сил связаны равенством

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (32)$$

<u>Замечание 3.</u> Равенство $\vec{F} = m\vec{a}$ нельзя считать определением силы. Сила не всегда вызывает ускорение. Она может проявляться при деформации тел, как это было с пружинами. Ускорение может быть равно нулю, но при этом силы всё равно есть. А главное – это знаменитое равенство выполнено лишь в ИСО. Но в определении ИСО уже заложено понятие силы.

Чтобы связать силу с величиной ma, нужен был первый опыт с центробежной машиной. Он показал, что если силу увеличить в 2 раза (прикрепить вместо одной пружины две), ma увеличится тоже в 2 раза, а не например в 4 или в $\sqrt{2}$. Показанный факт кажется настолько ясным, что в некоторых учебниках рассматривают только один опыт, который мы назвали вторым.

Возникает вопрос: можно ли отвлечься от данных ранее представлений о силе и не считать, что сила увеличилась в 2 раза, когда одну пружину заменили двумя? Тогда первый опыт не нужен и можно сразу считать силу численно равной ma. Но тогда не определено сложение сил как векторов. Каждая пружина в отдельности действует с силой $\vec{F}$, но чему равна их общая сила – ещё не известно. Это неудобно, поэтому в механике Ньютона приняты данные ранее представления о силе.

§ 12. Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона справедлив для любых тел (не обязательно материальных точек) и любых систем отсчёта. Он был установлен в результате многих наблюдений, маленьких опытов. Если мы давим рукой на стену, мы чувствуем, что стена давит на нашу руку. Когда мы отталкиваемся от бортика бассейна при прыжке в воду, это значит, что на наши ноги со стороны бортика действует сила. Но для этого мы должны сами подействовать на бортик силой. Такие факты позволяют сделать вывод о том, что **действие одного тела на другое носит взаимный характер.** Более того, для любых двух взаимодействующих тел всегда выполняется равенство $m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2$. Конечно, оно верно лишь в ИСО и если на эти два тела не действуют другие тела или действие всех тел скомпенсировано. Формулировка третьего закона Ньютона такова:

Тела взаимодействуют друг с другом силами, равными по модулю, противоположными по направлению, действующими вдоль одной прямой и одинаковыми по своей природе.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (33)$$

$\vec{F}_{12}$ – сила, с которой первое тело действует на второе, $\vec{F}_{21}$ – наоборот.

Если человек выпрыгивает из лодки на берег, то лодка начинает двигаться в противоположную сторону (от берега). Так происходит потому, что человек и лодка действуют друг на друга силами, направленными в противоположные стороны.

В этом законе 4 утверждения, не считая того, что все силы в природе возникают парно.

Упрощённые формулировки этого закона: *действие равно противодействию*, или *всякое действие носит взаимный характер*.

Результат взаимодействия может быть не одинаковым для обоих тел. Если масса лодки много больше, чем масса человека (или вообще это не лодка, а катер), то лодка практически «не почувствует» выпрыгивания человека на берег. Если два тела сталкиваются друг с другом, то одно из тел может разрушиться, а другое – нет. В этом случае прочность одного из тел больше прочности другого.

Можно ли вообще не вводить понятие силы, а всегда для двух тел записывать равенство $m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2$? Очевидно, и это легко проверить, что для выбранной пары тел оно выполняется, но число m_1a_1 (а также равное ему m_2a_2) в разных ситуациях будет разным. В одних случаях тела взаимодействуют сильнее, в других – слабее. Есть нечто, что можно назвать либо взаимодействием, либо силой, но что нельзя оставить без внимания. Если мы хотим предсказать, с каким ускорением будет двигаться тело или на сколько растянется пружина в какой-либо ситуации, мы должны рассматривать взаимодействие тел. Поэтому понятие силы нужно в механике Ньютона.

§ 13. Масса и сила тяжести

В формулу (32), связавшую силу с ускорением, входит масса. Обсудим подробнее, что такое масса. До открытия второго закона Ньютона было известно, что масса – это нечто, что можно измерять взвешиванием. Для этого нужно выбрать эталон. Масса была мерой количества вещества или материала. Из повседневного опыта ясно, что масса связана с силой. Чем больше масса тела, тем тяжелее его нести. Теперь мы знаем, что масса входит в формулу $F = ma$. Полученную ранее формулу мы записали в скалярном виде, чтобы выразить массу: $m = F/a$. Отсюда видно, что *масса – это мера инертности тела*. Чем больше масса, тем медленнее тело меняет свою скорость при заданном значении силы.

Получается, что масса определяет два свойства тел.

1. Масса – величина, определяющая, сколь быстро изменяется скорость тела при его взаимодействии с другими телами. Короче говоря, ***масса – мера инертности тела.***
Из законов Ньютона следует, что *при взаимодействии двух тел скорость одного из них изменяется быстрее во столько же раз, во сколько раз масса этого тела меньше массы другого.*
2. Масса – величина, определяющая силы притяжения всех тел друг к другу. Именно благодаря тому, что все тела притягиваются к Земле, массу тела можно определять на весах.
На самом деле, все тела в мире притягиваются не только к Земле, но и друг к другу. Но массы тел на Земле, которые мы видим вокруг, во много раз меньше массы Земли, и поэтому мы не замечаем притяжения тел друг к другу. Если мы положим на стол два карандаша, то мы не заметим, что они притягиваются друг к другу. Их скорости не будут меняться, потому что на карандаши, кроме сил притяжения, действуют силы трения, которые не дают им сближаться.
За единицу массы принят килограмм – 1 кг. Изготовлено специальное тело – международный образец (эталон) килограмма. Масса одного литра воды примерно равна 1 кг.
1 т = 1000 кг, 1 г = 0,001 кг, 1 мг = 0,000001 кг; 1 кг = 0,001 т, 1 кг = 1000 г, 1 кг = 1000000 мг.

Чему равна сила тяжести, действующая на тело массой m? Зная второй закон Ньютона, мы легко ответим на этот вопрос. Мы уже знаем, что все тела вблизи поверхности земли при свободном падении движутся с постоянным ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2, направленным вниз. Значит, по второму закону Ньютона, сила тяжести равна

$$\vec{F}_{тяж} = m\vec{g} \qquad (34)$$

§ 14. Гравитационные силы. Закон всемирного тяготения

В параграфе 13 мы упоминали о том, что все тела в мире взаимодействуют силами тяготения. Ещё их называют *гравитационными силами*. Их величина зависит от масс тел. Такими силами взаимодействуют Солнце и планеты, Земля и Луна, Земля и всё, что на ней. Вообще, любые два тела взаимодействуют силами тяготения, но эти силы слабые, и мы их не замечаем.

Возникает вопрос: как вычислять гравитационные силы, которыми взаимодействуют тела? Если нам известно ускорение и масса, то мы можем вычислить силу по второму закону Ньютона. Так мы получили формулу для силы тяжести (формула (34)). Но что делать, если ускорения неизвестны или тела вообще не движутся? Гравитационные силы существуют независимо от того, с какими ускорениями движутся тела и движутся ли они вообще. Поэтому наверняка можно получить формулу для гравитационных сил, в которую не будут входить ускорения.

Эту знаменитую формулу получил уже известный нам английский учёный Исаак Ньютон (1643-1727). Для этого он использовал данные астрономических наблюдений за движением планет вокруг Солнца и Луны вокруг Земли. При описании этого движения Солнце и планеты можно считать материальными точками, т.к. расстояние между ними много больше их размеров. Поэтому формула для сил тяготения, которую мы сейчас получим, справедлива для материальных точек.

Проследим за ходом мысли Ньютона. Сила тяжести, как уже известно, пропорциональна массе тела. Но, по третьему закону Ньютона, если Земля притягивает к себе тело, то и тело притягивает к себе Землю с такой же по модулю силой. Всякое действие есть взаимодействие. Тело и Земля в данном случае равноправны; разница между ними лишь в том, что масса Земли много больше массы тела. А если они равноправны, то сила, с которой они взаимодействуют, пропорциональна не только массе тела, но и массе Земли. *Сила притяжения двух тел пропорциональна массам обоих тел*:

$$F = Lm_1m_2,$$

где m_1 и m_2 – массы тел, а L – некоторый коэффициент пропорциональности. Остаётся выяснить, чему же равен этот коэффициент. Подумаем, от чего ещё, кроме масс тел, может зависеть сила их притяжения. Ньютон предположил, что *сила притяжения зависит от расстояния между телами*. Как это проверить? Ускорение свободного падения одинаково для тел, падающих с высоты 1 м, 10 м и 100 м. Это как будто бы означает, что сила тяжести не зависит от расстояния между телами. Но Ньютон считал, что отсчитывать нужно не от поверхности Земли, а от центра. А радиус Земли равен 6400 км, поэтому несколько десятков, сотен или даже тысяч метров над поверхностью Земли не могут заметно изменить ускорение свободного падения.

На помощь Ньютону пришла… Луна. Орбиту Луны (траекторию её движения) можно приближённо считать окружностью. А если так, то Луна движется с центростремительным ускорением.

Наблюдения за Луной показывают, что её центростремительное ускорение равно 0,0027 м/с^2. Это в 3600 раз меньше, чем ускорение свободного падения. Значит, сила тяготения зависит от расстояния между телами (если бы она не зависела от расстояния, то Луна двигалась бы с таким же ускорением, как и свободно падающие тела вблизи Земли). А как сила тяготения зависит от расстояния? Расстояние между центрами Земли и Луны равно 384000 км, а это в 60 раз больше, чем радиус Земли. То есть, увеличение расстояния между притягивающимися телами в 60 раз приводит к уменьшению ускорения (а значит и силы) в 60^2 раз. Значит, *сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами*:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \qquad (35),$$

где G – ещё некоторый коэффициент пропорциональности. От чего он зависит? Ньютон предположил, что он одинаковый для всех тел и ни от чего не зависит. Действительно, если тела – материальные точки, то ему вроде бы больше не от чего зависеть. Коэффициент G называется *гравитационной постоянной. Гравитационная постоянная одинакова для всех тел и равна*

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Значение гравитационной постоянной было получено из опытов, проделанных многими учёными. Первый опыт по определению гравитационной постоянной был проделан английским физиком Генри Кавендишем (1731-1810). Он сконструировал так называемые крутильные весы и измерил с их помощью силу притяжения двух шаров друг к другу.

Формула (35) выражает **закон всемирного тяготения**, который также называют «четвёртым законом Ньютона»:

Материальные точки или сферически симметричные тела притягиваются друг к другу с силой, модуль которой пропорционален произведению их масс и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними.

Сферически симметричное тело – это например шар, шар с полостью, шар с полостью, в которой ещё один шар, и так далее.

Наблюдение за Луной было не главным, что вселило в Ньютона уверенность в законе всемирного тяготения. Главными были три закона, сформулированные немецким математиком и астрономом Иоганном Кеплером (1571-1630) на основе астрономических наблюдений. Эти законы описывали движение планет в Солнечной системе. Третий закон Кеплера в упрощённой формулировке звучит так: *квадраты периодов обращения планет относятся как кубы радиусов орбит*.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

Учитывая, что $T^2 = \frac{4p^2 R}{a}$, где a – центростремительное ускорение, мы получим: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$. Применяя второй закон Ньютона, получим $\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_2}{m_1}\frac{R_1^2}{R_2^2}$, откуда видно, что сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами. Законы Кеплера и законы Ньютона подтверждают друг друга. Но законы Ньютона более универсальны.

§ 15. Сила упругости и вес тела. Сила упругости пружины. Сила реакции опоры

При деформации (изменении формы) многих тел возникает сила, стремящаяся вернуть тело в первоначальное (недеформированное) состояние. Предмет, поднятый над полом и затем отпущенный, падает, потому что на него действует сила тяжести. Однако на полу и на любой другой опоре тела лежат и не падают. Так происходит потому, что пол чуть-чуть, незаметно для глаза, прогибается (деформируется) в том месте, где лежит тело, и возникает сила упругости, направленная вверх. Именно сила упругости не даёт телу падать сквозь пол.

Сила, возникающая при деформации тела и стремящаяся вернуть тело в первоначальное состояние, называется силой упругости.

Вес тела – это сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес. Вес – та сила, которая деформирует опору или подвес. Вес обычно обозначают буквой Р.

В параграфе 10 мы вывели формулу для расчёта силы, с которой деформированная пружина (сжатая или растянутая) действует на тела, которые к ней прикреплены. Эта формула выражает **закон Гука** для пружины. Напомним её:

$$F = kx,$$

где x – величина деформации пружины, а k – коэффициент пропорциональности. Он постоянный для данной пружины и называется *коэффициентом жёсткости пружины*.

Закон Гука можно записать также для проекции силы упругости пружины на координатную ось:

$$F_x = -k\Delta x \qquad (36),$$

где Δx – изменение координаты конца пружины по сравнению с недеформированным положением.

Деформация называется упругой, если после прекращения внешнего воздействия тело возвращается в исходное состояние. Закон Гука справедлив для упруго деформированных тел (таких, как пружина, резиновый жгут или металлический стержень, если их не слишком сильно растягивать).

Сила упругости, возникающая при контакте двух поверхностей и направленная перпендикулярно этим поверхностям, называется силой реакции опоры.

Сила реакции опоры не даёт телам падать сквозь пол. Она обычно обозначается буквой N.

Силы упругости возникают за счёт изменения расстояний между частицами (атомами или молекулами), из которых состоит тело. В положении, когда тело не деформировано, силы взаимодействия частиц близки к нулю. Если мы сжимаем тело, расстояние между частицами уменьшается. При этом силы взаимодействия становятся силами отталкивания. Если мы растягиваем тело, расстояние между частицами увеличивается. При этом силы взаимодействия становятся силами притяжения. Таким образом, силы взаимодействия молекул или атомов в твёрдых телах всегда стремятся вернуть тело к некоторому положению равновесия.

Силы притяжения и отталкивания между молекулами и атомами – это не гравитационные силы (гравитационные силы там тоже есть, но они слабые). Было установлено, что эти силы электростатические. Такие силы изучаются в разделе «электростатика». Пока просто запомните, что *силы упругости имеют электростатическую природу*.

§ 16. Силы трения

Когда санки, скатившись с горы, движутся по горизонтальному пути, их скорость постепенно уменьшается, а через некоторое время они останавливаются. Причина этому – сила трения.

Сила, возникающая при движении или смещении одного тела вдоль поверхности другого и направленная против движения или смещения, называется силой трения.

Одной из причин возникновения силы трения является шероховатость поверхностей соприкасающихся тел.

Другая причина трения – взаимное притяжение молекул соприкасающихся тел.

Силы трения, как и силы упругости, имеют электростатическую природу.

При скольжении одного тела по поверхности другого возникает сила трения, называемая силой трения скольжения. Такая сила возникает при движении саней и лыж по снегу.

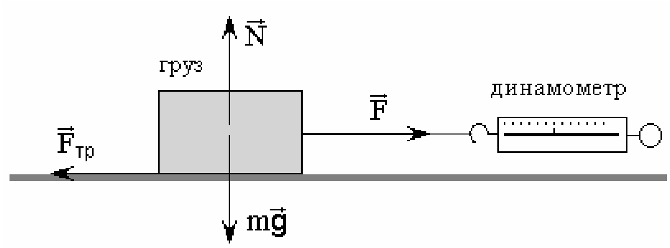
Если тело не скользит, а катится по поверхности другого, то сила трения, возникающая при этом, называется силой трения качения. Такая сила возникает при движении колёс по дороге, брёвен или бочек по земле.

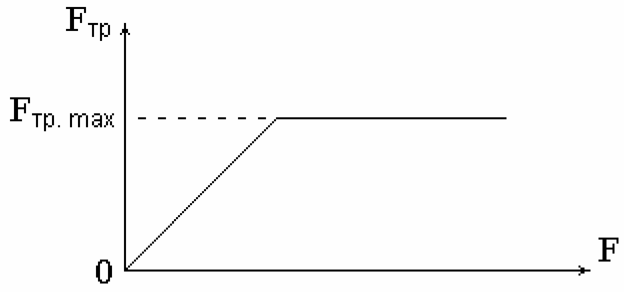
Пусть на полу стоит стол. Попробуем его передвинуть, постепенно увеличивая горизонтально прилагаемую к нему силу. Если на стол нажать слабо, то он не сдвинется с места. Почему? Действующая сила в этом случае уравновешивается силой трения между полом и ножками стола. Эта сила возникает тогда, когда ножки стола и пол чуть-чуть смещаются относительно друг друга, но в итоге остаются в неподвижном состоянии (ножки не начинают скользить по полу).

Сила трения, возникающая между телами, когда они не движутся относительно друг друга, называется силой трения покоя.

Сила трения покоя играет важную роль в мире. Без трения покоя ни люди, ни животные не могли бы ходить по земле, т.к. при ходьбе мы отталкиваемся ногами от земли. Когда трение между подошвой обуви и землёй (или льдом) мало, отталкиваться трудно, ноги при этом скользят. Сила трения покоя удерживает гвоздь, вбитый в доску, не даёт развязаться узлу на верёвке, удерживает нитку, которой сшиты два куска ткани. Сила трения, действующая на колёса автомобиля при разгоне, направлена вперёд. Без этой силы автомобиль не мог бы сдвинуться с места.

Изучим на опыте действие силы трения покоя и силы трения скольжения. Пусть на столе лежит груз (брусок). Прикрепим к грузу динамометр и будем тянуть груз вправо. На груз действуют 4 силы: сила тяжести, сила реакции опоры, сила F со стороны динамометра и сила трения. Сила тяжести и сила реакции опоры в данном случае уравновешивают друг друга (груз не падает сквозь стол). Груз может двигаться только в горизонтальном направлении. Будем постепенно увеличивать силу F. Сначала брусок не сдвинется с места. Это значит, что сила F уравновешивается силой трения покоя (силы равны по модулю и противоположны по направлению).





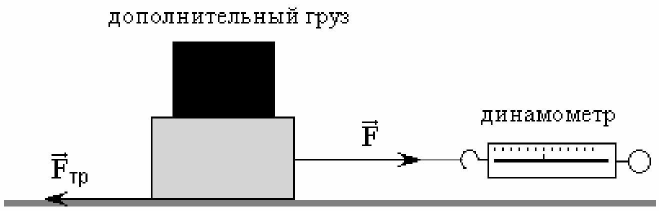
При некотором значении силы F брусок сдвинется с места и начнёт скользить. Это значит, что существует некоторая максимальная сила трения покоя $F_{тр.max}$. И только когда сила F станет хотя бы немного больше $F_{тр.max}$, брусок начнёт двигаться, и трение покоя перейдёт в трение скольжения.

Построим график зависимости силы трения от силы F. Мы видим, что сила трения увеличивается до значения $F_{тр.max}$, а после этого остаётся почти неизменной (горизонтальный участок графика). Мы видим также, что сила трения скольжения (обозначим её $F_{тр.ск}$) равна максимальной силе трения покоя:

$$F_{тр.ск} = F_{тр.max}.$$

Остаётся вопрос: от чего зависит $F_{тр.max}$? Известно, что тяжёлый предмет (ящик или шкаф) сдвинуть с места труднее, чем лёгкий. Но почему? Ведь сила тяжести направлена вертикально, а сдвинуть мы хотим в горизонтальном направлении. Ответ простой: максимальная сила трения покоя $F_{тр.max}$, а также равная ей сила трения скольжения $F_{тр.ск}$ зависят от силы прижатия предмета к полу. ***Чем больше сила, прижимающая тело к поверхности, тем больше возникающая при этом сила трения.***

Как именно зависит $F_{тр.max}$ от силы прижатия? Ответ на этот вопрос легко получить с помощью опытов. Поставим на брусок дополнительный груз, чтобы сильнее прижать брусок к столу.

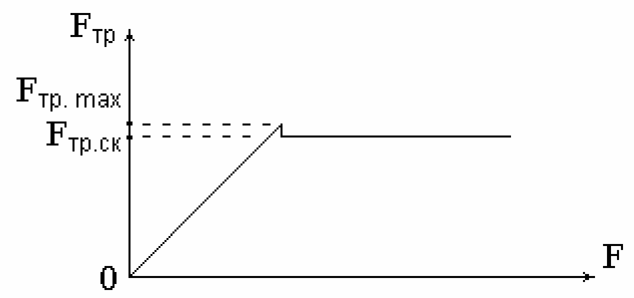


Измерим $F_{тр.max}$. Мы увидим, что $F_{тр.max}$ увеличилась во столько же раз, во сколько и сила прижатия. Значит, $F_{тр.max}$ пропорциональна силе прижатия. Но по третьему закону Ньютона, сила прижатия равна силе реакции опоры. Значит, $F_{тр.max}$ *пропорциональна силе реакции опоры*:

$$F_{тр.max} = \mu N, \qquad (37)$$

где μ – коэффициент пропорциональности. Он называется **коэффициентом трения** и зависит от материалов соприкасающихся поверхностей (точнее, от свойств поверхностей; например, от того, как они обработаны). Коэффициент трения обычно меньше единицы (сила трения меньше силы реакции опоры). Формула (37) называется законом Амонтона-Кулона. Так сложилось исторически. Хотя теперь известно, что этот закон впервые сформулировал итальянский живописец, скульптор, учёный, инженер и архитектор Леонардо да Винчи (1452-1519).

Сделаем небольшое уточнение. Мы установили, что сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя: $F_{тр.ск} = F_{тр.max}$. Значит, силу трения скольжения тоже можно найти по формуле (37). Но это неточно. Увеличим точность наших измерений и снова построим график зависимости силы трения от силы F.



Мы видим следующее: сила трения скольжения чуть меньше максимальной силы трения покоя. То есть, в момент, когда брусок трогается с места, сила трения резко падает на некоторую небольшую величину. Это явление получило название явления застоя.

Явление застоя заключается в том, что максимальная сила трения покоя чуть больше, чем сила трения скольжения.

При решении задач мы будем считать (за исключением тех случаев, где это оговорено особо), что сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя:

$$F_{тр.ск} = F_{тр.max} = \mu N.$$

Перечислим ещё раз особенности сил трения.

1. Силы трения бывают трёх типов: трение скольжения, трение качения, трение покоя. В задачах нам будут встречаться два типа: трение покоя и трение скольжения. И важно будет различать, в каком случае какой тип реализуется.
2. Силы трения направлены против движения.
3. Силы трения не зависят от площади соприкосновения поверхностей и не зависят от модуля скорости движения (точнее, зависят, но очень слабо). Они зависят только от свойств поверхности.

Всё сказанное выше относится к сухому трению (трению сухих поверхностей). Но если поверхности тел смазать, то между ними возникнет другой тип сил трения. Эти силы, как правило, меньше, чем силы сухого трения. Механизмы смазывают для того, чтобы уменьшить трение. Эти силы называются **силами вязкого трения** или **силами сопротивления среды**. Мы не будем изучать эти силы подробно, а отметим лишь их главные особенности.

1. *В жидкостях и газах нет силы трения покоя.* Даже самая малая сила, приложенная к телу в жидкости или газе, сообщает ему ускорение. Действительно, если лодку, стоящую на воде, толкнуть даже очень слабо, то она придёт в движение. Но если толкать слабо ту же лодку, стоящую на земле, то она не сдвинется с места, так как на неё будет действовать сила трения покоя.

2. *Силы сопротивления среды зависят от модуля скорости.* Эта зависимость в разных случаях разная. При малых скоростях сила сопротивления пропорциональна скорости, а при больших скоростях она пропорциональна уже квадрату скорости.

3. *Силы сопротивления среды зависят от формы тела, движущегося в среде.*

Капли дождя вблизи земли движутся равномерно, потому что сила тяжести уравновешена силой сопротивления воздуха.

§ 17. Сила Архимеда

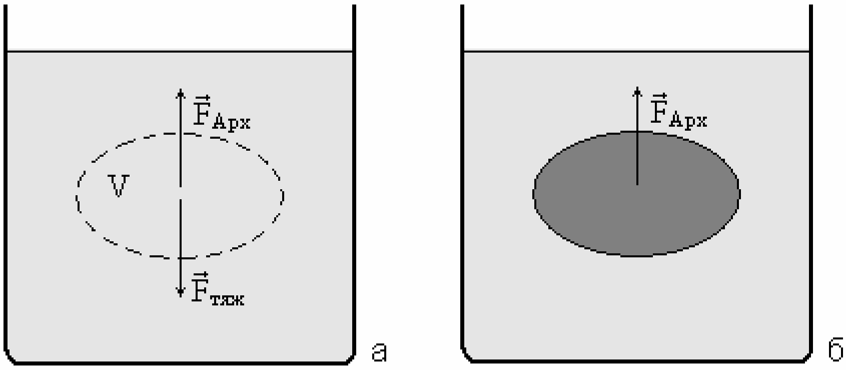
Вспомним ещё одну силу, которую мы изучили в курсе 7 класса.

На тело, погружённое в жидкость, действует выталкивающая сила, равная по модулю весу вытесненной жидкости и противоположно ему направленная.

Сила Архимеда (выталкивающая сила) – это равнодействующая сил давления жидкости на погружённое в неё тело.

Сила Архимеда обусловлена разностью давления жидкости на разной высоте.

Пусть имеется сосуд с жидкостью, и мы хотим поместить в этот сосуд тело сложной формы. Выделим мысленно объём жидкости V, на место которого мы хотим поместить тело. Так как этот объём покоится, то сила тяжести, действующая на него, равна силе Архимеда: $F_{тяж} = F_{Арх}$. А силу тяжести мы вычислим легко: $F_{тяж} = m_ж g = \rho_ж gV$. Значит, $F_{Арх} = \rho_ж gV$, где $\rho_ж$ – плотность жидкости.

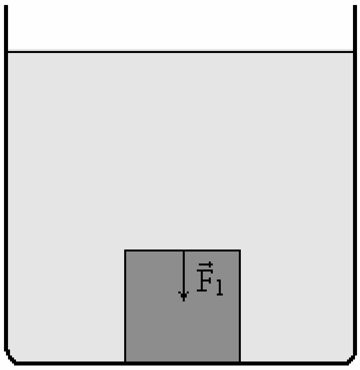


Теперь представим, что мы убрали объём жидкости V, а на его место поместили тело. Давление в каждой точке на границе тела не изменилось. Поэтому равнодействующая сил давления жидкости на поверхность, ограничивающую тело, не изменилась и осталась равной

$$\boxed{F_{Арх} = \rho_ж g V \qquad (38)}$$

Эта формула справедлива для тела любой формы, включая те случаи, когда тело плавает на поверхности жидкости и погружено лишь частично. В случае если тело погружено частично, V – это объём той части тела, которая находится ниже уровня жидкости.

Однако если часть поверхности тела плотно прилегает к стенке или дну сосуда так, что между ними нет прослойки жидкости, то закон Архимеда неприменим. Иллюстрацией к этому служит опыт, когда одну грань деревянного кубика натирают парафином и плотно приставляют ко дну сосуда, а затем осторожно наливают воду. Кубик не всплывает, т.к. на его нижнее основание не действует сила давления воды. Сила, действующая на верхнее основание, прижимает кубик ко дну.



Закон Архимеда справедлив также и для тела, помещённого в газ.

Сила Архимеда – та сила, благодаря которой плавают корабли и поднимаются в воздух воздушные шары и аэростаты. Воздушный шар поднимается потому, что на него действует сила Архимеда со стороны воздуха.

Если жидкость или газ движется относительно Земли (или другой инерциальной системы отсчёта) с ускорением, то формула (38) неприменима. Для случая движения с ускорением её нужно модернизировать (этому посвящена задача 201).

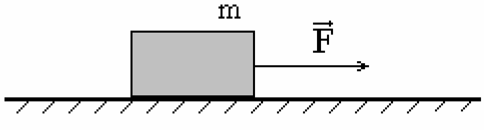
§ 18. Классификация сил. Фундаментальные и контактные силы
Объединим силы, о которых мы узнали, в таблицу:

Сила	Формула
Сила тяжести вблизи поверхности Земли	$\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}$ (34)
Гравитационная сила (сила всемирного тяготения)	$F = G\dfrac{m_1 m_2}{R^2}$ (35) *(закон всемирного тяготения)*
Сила упругости	$F_x = -k\Delta x$ (36) *(закон Гука)*
Силы трения: трение скольжения, трение качения, трение покоя	$F_{тр.max} = \mu N$ (37) $F_{тр.ск} = \mu N$
Силы сопротивления среды	$F = \alpha\upsilon$ или $F = \beta\upsilon^2$
Сила Архимеда	$F_{Арх} = \rho_ж g V$ (38)

В природе существует множество различных сил. Но оказывается, что все силы сводятся к четырём **фундаментальным силам** (или **фундаментальным взаимодействиям**). Это **гравитационное**, **электромагнитное**, **сильное ядерное и слабое ядерное** взаимодействия. Из всех этих взаимодействий мы пока изучили только гравитационное. Сильное и слабое ядерное взаимодействия мы кратко рассмотрим в разделе «физика атомного ядра и элементарных частиц».
Мы упоминали, что сила упругости и сила трения имеют электростатическую природу. Удивительно, но оказывается, что вообще все контактные силы имеют электростатическую природу.
Контактные силы – это все силы, действующие при близком контакте тел.
Для некоторых контактных сил имеются специальные формулы (такие как (36), (37), (38)).
Фундаментальные силы действуют на расстоянии.
Все контактные силы на микроскопическом уровне (уровне атомов и молекул) сводятся к фундаментальным силам (к электростатическим), которые действуют на расстоянии. Но при практических расчётах мы этого не учитываем и пользуемся специальными формулами.

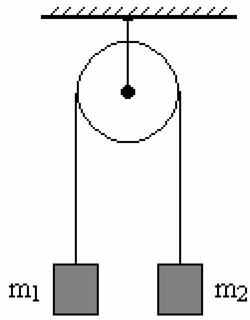
Задачи

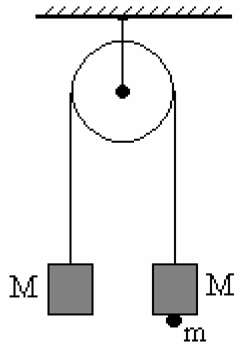
Для решения задач 109 – 136 достаточно изучить параграфы 10 – 13.
109. Автомобиль тянет прицеп, действуя на него силой F = 2000 Н. С каким ускорением движется прицеп, если его масса равна m = 500 кг? Трением пренебречь.
110. На горизонтальной абсолютно гладкой поверхности стола (то есть такой, что трение можно не учитывать), лежит брусок. Брусок начали тянуть с силой F = 6 Н, направленной горизонтально (см. рис), и он начал двигаться с ускорением a = 12 м/с^2. Чему равна масса бруска?



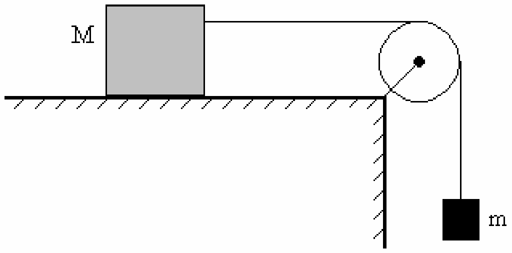
111. На горизонтальной абсолютно гладкой поверхности стола (то есть такой, что трение можно не учитывать), лежит брусок массой m = 0,2 кг. На брусок начали действовать постоянной силой, и к моменту, когда брусок прошёл путь S = 2 м, его скорость стала равна υ = 4 м/с. Найдите силу, действующую на брусок.
112. Подъёмный кран равномерно поднимает груз массой M = 600 кг. С какой силой крюк подъёмного крана действует на груз?
113. Масса кабины лифта вместе с пассажирами равна m = 500 кг. Кабина поднимается с ускорением a = 1 м/с^2. Найдите силу натяжения троса, на котором поднимается кабина. Трение не учитывать.

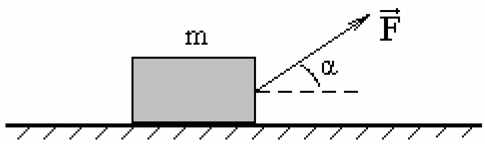
114. Два груза массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 340$ г подвешены на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок (рис. слева). За время $t = 2$ с от начала движения каждый из грузов прошёл путь $S = 1{,}2$ м. Определите по этим данным ускорение свободного падения. Массой блока и трением в блоке пренебречь.
115. Два одинаковых груза массами $M = 0{,}5$ кг подвешены на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок (рис. справа). К одному из грузов прилепили снизу кусок пластилина массой $m = 300$ г. С каким ускорением начали двигаться грузы? Блок считать невесомым, трением пренебречь.





116. На абсолютно гладком столе лежит брусок массой $M = 0{,}4$ кг, связанный с грузом массой $m = 0{,}6$ кг невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (см. рис. слева). С каким ускорением движутся грузы? Блок считать невесомым, трением пренебречь.

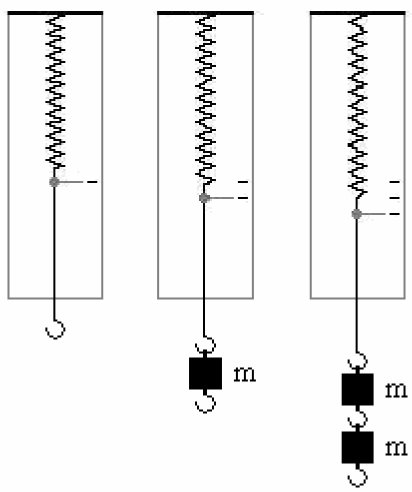


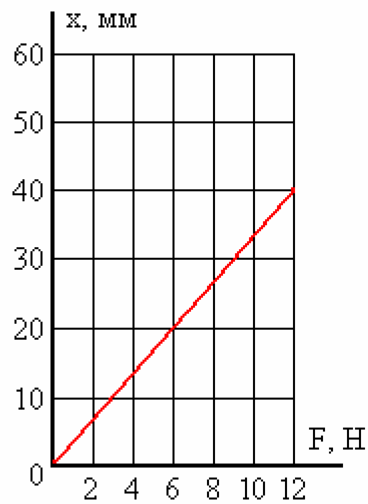


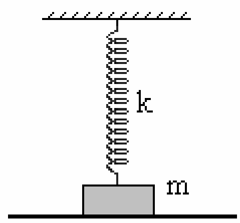
117. На абсолютно гладком столе лежит брусок массой $m = 1$ кг. Брусок тянут силой $F = 20$ Н, направленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Какой путь пройдёт брусок за $t = 1$ с после начала движения?
118. На тело массой $m = 30$ г действуют две силы $F_1 = 0{,}2$ Н и $F_2 = 0{,}17$ Н, направленные противоположно друг другу. Какую скорость наберёт тело за $t = 10$ с после начала движения?
119. На тело массой $m = 50$ г действуют две силы $F_1 = 3$ Н и $F_2 = 4$ Н, направленные перпендикулярно друг другу. С каким ускорением движется тело?
120. На тело массой $m = 100$ г действуют две силы $F_1 = 2$ Н и $F_2 = 4$ Н, угол между векторами которых равен $\alpha = 60°$. С каким ускорением движется тело?
121. Два мальчика, массы которых равны 40 кг и 50 кг, стоят на коньках на льду. Первый мальчик отталкивается от второго с силой 10 Н. С какими ускорениями движутся мальчики? Трением пренебречь.
122. На абсолютно гладком столе находятся два бруска массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 200$ г, связанные невесомым резиновым жгутом. В некоторый момент бруски движутся относительно друг друга с ускорением $a = 5$ м/с^2. Чему равно в этот момент ускорение каждого бруска относительно стола?
123. Два человека тянут верёвку в противоположные стороны с силой $F = 50$ Н каждый. Разорвётся ли верёвка, если она выдерживает максимальную силу натяжения $T = 80$ Н?
124. Две команды участвуют в перетягивании каната. Первая команда при максимальном усилии может тянуть канат с силой $F_1 = 6300$ Н, а вторая – с силой $F_2 = 6400$ Н. В некоторый момент обе команды приложили максимальное усилие. Чему равна сила натяжения каната в этот момент?
125. *Вес тела, покоящегося в неинерциальной системе отсчёта, может быть не равен силе тяжести, действующей на это тело.* Рассмотрим такой пример: на полу лифта, движущегося с ускорением $a = 2$ м/с^2, лежит груз массой $m = 10$ кг. Найдите вес груза в двух случаях: лифт движется вверх и лифт движется вниз. Сделайте вывод о том, в каких случаях вес тела больше силы тяжести, а в каких – меньше.
126. Найдите вес груза массой $m = 60$ кг, стоящего на полу лифта, падающего с ускорением свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

127. Почему при резком торможении и разгоне транспорта пассажиров отбрасывает вперёд и назад соответственно? Ведь никакие дополнительные силы на пассажиров не действуют.
128. Космонавт массой m = 70 кг покоится относительно ракеты, взлетающей с ускорением a = 20 м/с^2. Какую перегрузку испытывает космонавт (на сколько его вес в ракете больше его веса на Земле)?
129. Автомобиль массой m = 5 т едет равномерно со скоростью υ = 20 м/с по закруглённому участку дороги радиусом R = 100 м. Участок дороги представляет собой впадину. С какой силой автомобиль давит на полотно дороги в момент прохождения низшей точки впадины?
130. Автомобиль массой m = 4 т едет равномерно со скоростью υ = 54 км/ч по выпуклому мосту с радиусом закругления R = 80 м. С какой силой автомобиль давит на мост в момент прохождения его наивысшей точки?
131. Самолёт делает мёртвую петлю радиуса R = 1 км. С какой минимальной скоростью должен лететь самолёт, чтобы лётчик не оторвался от сидения в её верхней точке?
132. Во сколько раз увеличивается вес лётчика при входе в мёртвую петлю радиуса R = 2 км в её нижней точке, если скорость самолёта равна υ = 900 км/ч?
133. За много лет до Ньютона Леонардо да Винчи высказал следующее утверждение: «Если сила за заданное время перемещает тело на определённое расстояние, то та же сила половину такого тела переместит на такое же расстояние за вдвое меньшее время». Верно ли это утверждение?
134. Автомобиль массой m = 1000 кг движется по горизонтальному кольцевому участку дороги с радиусом закругления R = 100 м со скоростью υ = 20 м/с. Куда направлена равнодействующая всех сил, действующих на автомобиль, и чему равен её модуль? Напомним, что *равнодействующей называется сила, которая производит на тело такое же действие, как несколько одновременно действующих сил*.
135. *Скорость, которую нужно сообщить искусственному спутнику Земли, чтобы вывести его на низкую круговую орбиту, радиус которой примерно равен радиусу Земли, называется первой космической скоростью*. Выведите формулу для расчёта первой космической скорости. Рассчитайте первую космическую скорость, если известен радиус Земли R = 6400 км и ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 9,8 м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.
136. Чему равен вес тела массой m = 20 кг, находящегося внутри искусственного спутника Земли?

Прежде чем решать следующие задачи, нужно прочитать параграфы 14-16.
137. На полу стоит чемодан массой m = 10 кг. Сделайте рисунок и нарисуйте стрелками все известные вам силы, действующие на чемодан. Как называется и чему равна каждая из этих сил?
138. На рис. слева показано, как градуируют динамометр, подвешивая на его крюк грузы массой m = 102 г (сначала один груз, потом ещё один такой же груз и т.д.). Чему равна цена деления динамометра? Чему равен коэффициент жёсткости пружины, если известно, что расстояние между двумя соседними делениями равно x = 2 см? В этой задаче пользуйтесь более точным значением g = 9,8 Н/кг.



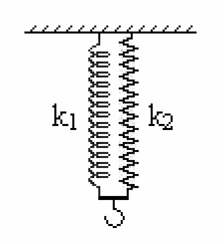


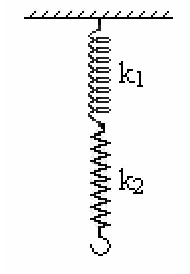


139. На среднем рисунке изображён график зависимости удлинения пружины от приложенной к ней силы. Определите коэффициент жесткости этой пружины.

140. На рис. справа изображён груз массой m = 1,5 кг, лежащий на подставке. К нему прикреплена пружина с коэффициентом жесткости k = 100 Н/м, растянутая на величину x = 5 см. С какой силой груз давит на подставку?

141. На рис. слева изображены две пружины с коэффициентами жёсткости k_1 = 40 Н/м и k_2 = 80 Н/м. Пружины расположены близко друг к другу и соединены снизу. Определите общий коэффициент жёсткости получившейся конструкции.



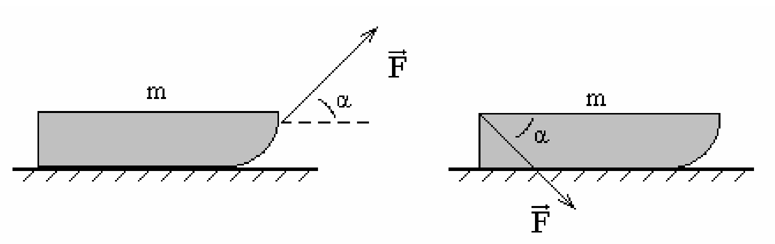


142. Две пружины с коэффициентами жёсткости k_1 = 60 Н/м и k_2 = 120 Н/м соединены так, как показано на рис. справа. Определите общий коэффициент жёсткости получившейся конструкции.

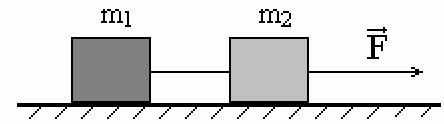
143. На полу стоит ящик массой m = 50 кг. Коэффициент трения между ящиком и полом равен μ = 0,6. С какой минимальной горизонтальной силой нужно толкать ящик, чтобы сдвинуть его с места?

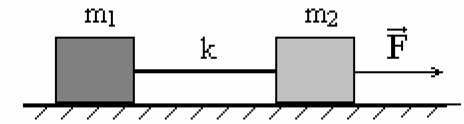
144. На столе лежит стопка одинаковых книг. Что легче: сдвинуть с места две верхние книги вместе или сдвинуть только вторую сверху книгу, удерживая первую неподвижной?

145. Две подруги П1 и П2 решили прогуляться со своими маленькими детьми, которых они везут на санках. Подруга П1 тянет санки за верёвку, направленную под углом α = 45° к горизонту, а подруга П2 толкает санки перед собой за ручку, направленную под тем же углом к горизонту. Масса каждых санок с ребёнком равна m = 30 кг, и каждые санки движутся с ускорением a = 1 м/с^2. Коэффициент трения между каждыми санками и дорогой равен μ = 0,4. Определите, какая из подруг прилагает меньшую силу. Вычислите силу, которую прилагает каждая из подруг.



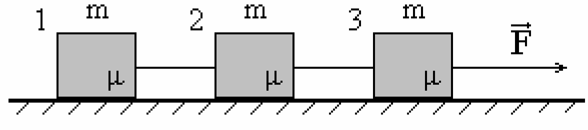
146. Два бруска массами m_1 = 3 кг и m_2 = 1 кг движутся по абсолютно гладкой поверхности под действием силы F = 16 Н (см. рис. слева). Чему равна сила натяжения нити, которой связаны бруски?

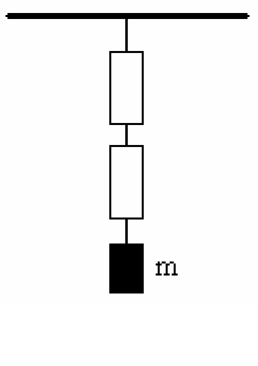




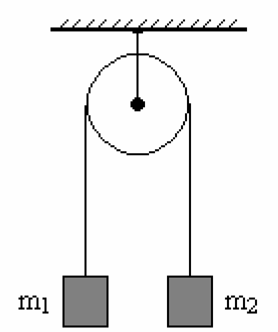
147. По абсолютно гладкой поверхности движутся два бруска, связанные резиновым жгутом, коэффициент жёсткости которого равен k = 200 Н/м (рис. справа). Масса левого бруска в 2 раза больше массы правого. Удлинение жгута равно x = 5 мм. Чему равна сила F, действующая на систему?

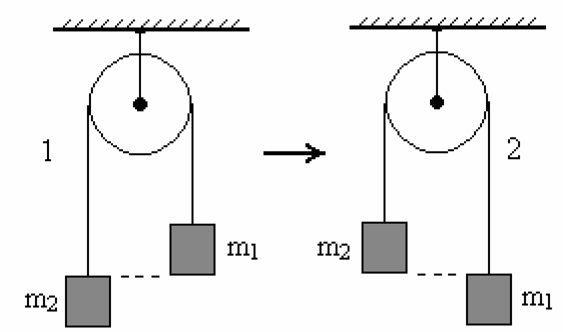
148. По столу движется система из трёх брусков массой m каждый под действием силы F (рис. слева). Коэффициент трения между каждым бруском и столом равен μ. Найдите силу натяжения нити, связывающей первый брусок со вторым, и нити, связывающей второй брусок с третьим.



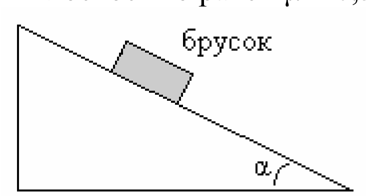


149. К двум динамометрам подвешен груз массой m = 10 кг, как показано на рисунке справа. Пренебрегая массами динамометров, определите, какую силу показывает каждый из них.
150. На столе лежит учебник физики массой m = 200 г. Коэффициент трения между учебником и столом равен $\mu = 0{,}4$. Кошка толкает учебник лапой с силой, направленной вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту и равной по модулю F = 1 Н. Сдвинется ли учебник с места?
151. На столе лежит деревянный брусок массой m = 400 г. Коэффициент трения между бруском и столом равен $\mu = 0{,}4$. Брусок тянут с силой, направленной вверх под углом $\alpha = 30°$ к горизонту и равной по модулю F = 5 Н. Сдвинется ли брусок с места, и если да, то с каким ускорением он будет двигаться?
152. Два груза m_1 = 300 г и m_2 = 200 г подвешены на резиновом жгуте, перекинутом через блок (рис. слева внизу) и движутся равноускоренно. Найдите удлинение жгута, если его коэффициент жёсткости равен k = 10 Н/м.
153. Система, изображённая на рисунке справа, перешла из положения 1 в положение 2 за t = 0,8 с. В положении 1 грузы были неподвижны. Высота каждого груза равна h = 80 см, а масса первого груза равна m_1 = 0,5 кг. Найдите коэффициент жёсткости нити, если известно, что её удлинение при движении было равно Δl = 0,5 мм.





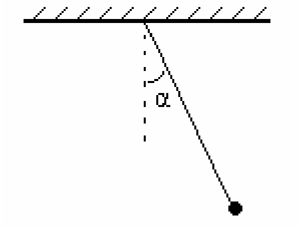
154. Безмен (пружинные весы с крючком) имеет массу m = 300 г. Почти вся его масса сосредоточена в корпусе. Безмен подвесили за крючок к потолку лифта. Какую массу он покажет, если лифт будет двигаться с ускорением $a = 1\,\text{м/с}^2$? Безмен не колеблется в лифте. Рассмотрите два случая: лифт движется вверх и вниз.
155. Два груза m_1 = 200 г и m_2 = 400 г подвешены на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок (рис. слева вверху) и движутся равноускоренно. Дело происходит в лифте, движущемся вверх с ускорением $a = 1\,\text{м/с}^2$. Найдите ускорения грузов относительно лифта и силу, с которой крепление блока действует на потолок.
156. По наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 60°$ с горизонтом (см. рис.), скользит брусок. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен $\mu = 0{,}5$. Чему равно ускорение бруска?

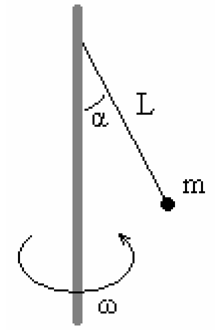


157. Мальчик съезжает на санках с плоской ледяной горки, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Скорость санок в верхней точке горки равна нулю, а длина горки равна L = 100 м. Сколько времени длится спуск, если коэффициент трения между полозьями санок и льдом равен $\mu = 0{,}2$?
158. На наклонную плоскость, образующую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, положили брусок массой m = 2 кг. Брусок остался неподвижен. Найдите силу трения покоя, действующую на него.
159. На наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, положили брусок массой m. При каком минимальном коэффициенте трения между бруском и плоскостью брусок будет лежать на ней неподвижно?
160. На наклонную плоскость, образующую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, положили кирпич массой m = 3,5 кг. Найдите силу трения, действующую на плоскость со стороны кирпича, в двух случаях:
а.) коэффициент трения между кирпичом и плоскостью равен $\mu = 0{,}3$;
б.) коэффициент трения между кирпичом и плоскостью равен $\mu = 0{,}6$.

161. На краю горизонтального диска радиуса R = 30 см, вращающегося с периодом T = 2 с, лежит маленький предмет. Каким должен быть минимальный коэффициент трения между диском и предметом, чтобы предмет не слетал с диска?

162. Грузик массой m, подвешенный к потолку на нити (рис. слева), равномерно движется по окружности со скоростью υ. Найдите радиус окружности, если нить образует угол α с вертикалью.



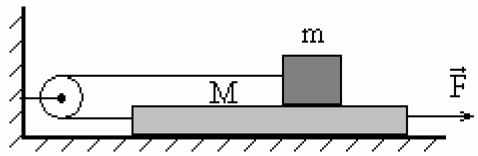


163. К вертикальному валу, вращающемуся с угловой скоростью ω = 10 рад/с, прикреплён стержень длиной L = 1 м (рис. справа). Стержень образует с валом угол α = 30°, а на его конце закреплён груз массой m = 1 кг. С какой силой груз действует на стержень?

164. Найдите минимальный радиус окружности, по которой может проехать велосипедист со скоростью υ = 36 км/ч, если коэффициент трения между шинами и дорогой равен μ = 0,5. Найдите угол наклона велосипеда к горизонтальной плоскости при таком движении.

165. Груз массой m = 0,2 кг подвешен к потолку на резиновом жгуте длиной *l* = 0,5 м, коэффициент жёсткости которого равен k = 40 Н/м. Груз качается из стороны в сторону (как маятник), проходя нижнюю точку траектории со скоростью V = 0,5 м/с. Найдите удлинение жгута в момент прохождения грузом нижней точки траектории. Считайте, что удлинение много меньше начальной длины *l*.

166. На абсолютно гладком столе лежит доска массой M = 2 кг, а на доске лежит брусок массой m = 1 кг. Брусок связан с доской нитью, перекинутой через блок (см. рис). Коэффициент трения между бруском и доской равен μ = 0,5. Доска движется с ускорением, равным половине ускорения свободного падения. Вычислите силу F, приложенную к доске.



167. На абсолютно гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежит доска. С каким ускорением и в каком направлении (вверх или вниз) должен бежать по доске человек, чтобы доска оставалась неподвижной? Масса доски равна M, а масса человека равна m.

168. На абсолютно гладком горизонтальном полу лежит доска массой m_1. На доске лежит брусок массой m_2, и коэффициент трения между доской и бруском равен μ. На брусок начинают действовать силой, направленной вдоль доски и увеличивающейся пропорционально времени: F = αt. Постройте графики зависимости ускорения доски и бруска от времени.

169. Вычислите силу притяжения Луны к Земле. Масса Луны равна $m_l = 7\cdot10^{22}$ кг, а масса Земли равна $m_2 = 6\cdot10^{24}$ кг. Расстояние между Землёй и Луной равно R = 384000 км.

170. Вычислите массу Земли, пользуясь законом всемирного тяготения. Известно, что радиус Земли равен R = 6400 км, а ускорение свободного падения на её поверхности равно g = 9,8 м/с^2.

171. Выведите формулу для расчёта массы планеты, если известен спутник этой планеты, вращающийся по круговой орбите радиуса R с периодом T.

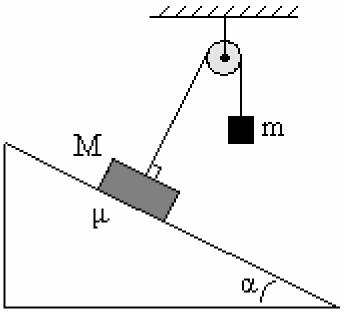
172. Земля при движении по своей орбите вокруг Солнца совершает полный оборот за T = 1 год. Радиус орбиты Земли примерно равен $R = 1{,}49\cdot10^8$ км. По этим данным вычислите массу Солнца.

173. Выведите формулу для расчёта ускорения свободного падения на планете, если известен её радиус R и её масса M.

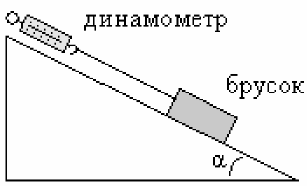
174. На какой высоте над поверхностью Земли ускорение свободного падения в 2 раза меньше, чем на поверхности? Радиус Земли R = 6400 км.

175. Выведите формулу для расчёта первой космической скорости, если известен радиус планеты R и её масса M.

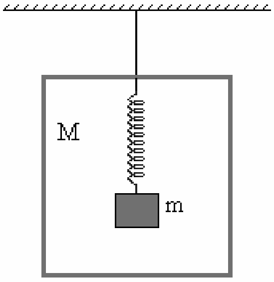
176. При какой длительности суток на Земле вес всех предметов на экваторе был бы равен нулю?
177. Найдите радиус планеты, если её средняя плотность равна ρ = 720 кг/м^3, а первая космическая скорость для неё равна υ_1 = 2,7 км/с.
178. Два экваториальных спутника движутся с периодами T_1 = 1,49 ч и T_2 = 1,33 ч относительно Земли на низких орбитах. Скорость точек экватора, обусловленная вращением Земли вокруг своей оси, равна υ = 460 м/с. Определите по этим данным первую космическую скорость для Земли.
179. Планета радиусом R = 16000 км совершает оборот вокруг своей оси за T = 10 часов. Вес всех предметов на экваторе этой планеты в 3 раза меньше, чем на полюсе. Чему равна первая космическая скорость для этой планеты?
180. Где-то в Бразилии, недалеко от экватора, влюблённые прогуливались по ночному саду. Им светила полная Луна, стоящая в зените. На сколько увеличится ускорение свободного падения в этом саду через 12 часов? Масса Луны $M = 7{,}34\cdot10^{22}$ кг; расстояние между центрами Земли и Луны $L = 3{,}84\cdot10^{8}$ м, что во много раз больше радиуса Земли.
181. Как изменится первая космическая скорость спутника, если его массу уменьшить вдвое?
182. Тело свободно падает с высоты h один раз на экваторе Земли, а другой раз на полюсе. Сравните время падения на экваторе и на полюсе и вычислите отношение этих времён. Землю считать шаром радиуса R = 6400 км.
183. В системе, изображённой на рисунке, масса большого груза M = 1 кг, а коэффициент трения между ним и наклонной плоскостью μ = 0,9. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α = 30°. Найдите максимальное значение массы второго груза m, при котором система не придёт в движение.



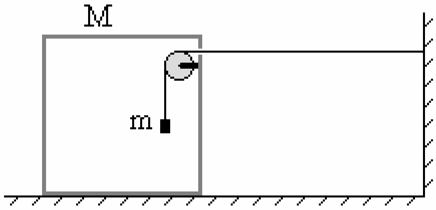
184. Водитель автомобиля, движущегося со скоростью υ, резко затормозил, заблокировав все четыре колеса. Коэффициент трения между шинами и полотном дороги равен μ. Вычислите ускорение и тормозной путь автомобиля.
185. На дороге был гололёд. Водитель маршрутки, подъезжая к остановке, снизил скорость, однако всё равно вынужден был затормозить достаточно резко. При этом он заблокировал все четыре колеса. Коэффициент трения между шинами и льдом равен μ = 0,5. Найдите тормозной путь, если известно, что время торможения равно t = 2 с.
186. На наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, удерживают брусок, привязав его нитью к динамометру. При измерении силы натяжения нити динамометром оказалось, что максимальная сила, при которой брусок остается неподвижным, в N раз больше минимальной.



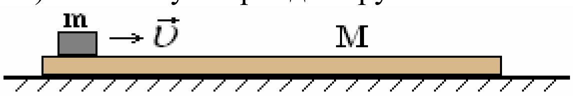
Найдите коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью.
187. Если лифт вдруг начнёт свободно падать, то все предметы, находящиеся в нём, подлетят вверх (относительно лифта). Почему?
188. Коробка массой M подвешена на нитке к потолку комнаты. Внутри коробки на пружине подвешен груз массой m. Нитку пережигают. С каким ускорением относительно коробки начнёт двигаться груз?



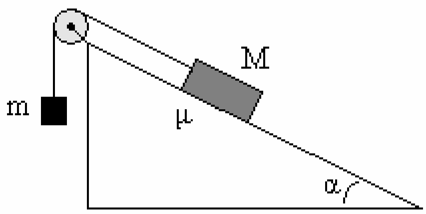
189. На полу стоит коробка массой M. В коробке к нити прикреплён грузик массой m, как показано на рисунке. Его сначала держат рукой. Правый конец нити прикреплён к стене. Нить невесомая и нерастяжимая, блок тоже невесом и может вращаться без трения. Грузик отпускают. При каких значениях коэффициента трения между полом и коробкой коробка начнёт скользить?



190. На абсолютно гладкой поверхности лежит доска массой M = 4 кг. На краю доски лежит брусок массой m = 500 г. Коэффициент трения между доской и бруском равен μ = 0,4. Бруску быстро сообщили скорость υ = 5 м/с (см. рис). Какой путь пройдёт брусок относительно доски?



191. На наклонной плоскости, образующей угол α = 30° с горизонтом, лежит брусок массой M = 2 кг. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен μ = 0,5. Брусок связан нитью, перекинутой через блок, со вторым бруском. Найдите все значения массы m второго бруска, при которых эта система не придёт в движение. Нить невесома и нерастяжима, блок невесом и трения в нём нет.

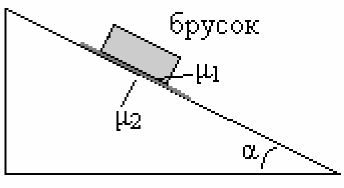


192. В системе, изображённой на рисунке сверху, m = 1 кг, M = 0,6 кг, α = 45°, μ = 0,3. Придёт ли система в движение, и если да, то в какую сторону и с каким ускорением?

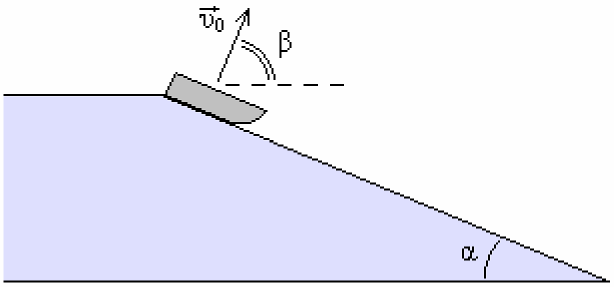
193. В Петербурге, находящемся на φ = 60° северной широты, дети играют в хоккей. Когда разыгрывают шайбу, её кладут на лёд неподвижно. Каким может быть минимальный коэффициент трения между шайбой и льдом, при котором положенная на лёд шайба не начнёт двигаться сама? Радиус Земли R = 6380 км.

194. На наклонной плоскости, образующей угол α = 30° с горизонтом, держат лист бумаги. На лист положили большой деревянный брусок. Коэффициент трения между бруском и бумагой $\mu_1 = 0{,}2$, а между бумагой и наклонной плоскостью – $\mu_2 = 0{,}3$. С каким ускорением начал двигаться брусок, когда брусок и бумагу отпустили?

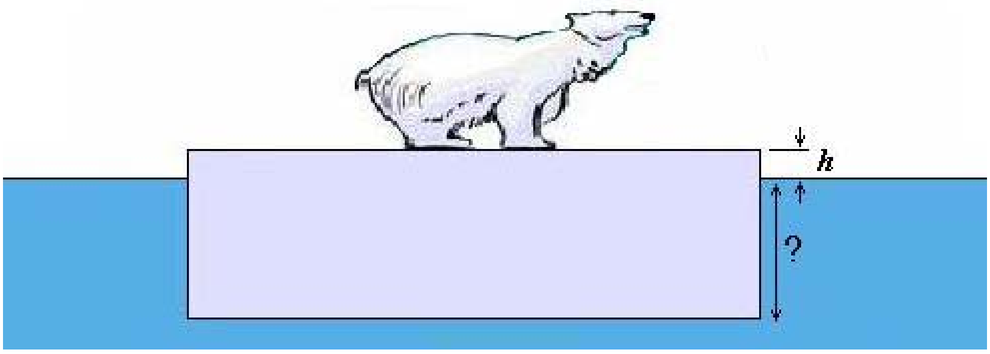
Ответьте на тот же вопрос, если $\mu_1 = 0{,}4$, $\mu_2 = 0{,}3$.



195. Находясь на вершине ледяной горки, образующей угол α = 30° с горизонтом, мальчик кинул снежок под углом β = 70° к горизонту и в этот же момент начал спускаться с горки на санках без начальной скорости. В некоторый последующий момент снежок попал… в мальчика. Найдите коэффициент трения между полозьями санок и льдом.



196. Недалеко от льдов Арктики на небольшом айсберге площадью S = 70 м^2 стоит белый медведь массой m = 700 кг. При этом высота надводной части айсберга равна h = 10 см. Найдите высоту подводной части айсберга. Плотность воды считать равной $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, плотность льда $\rho_л$ = 900 кг/м^3.

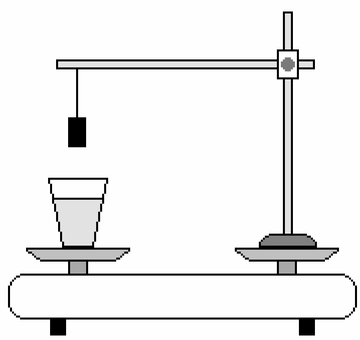


197. Масса аэростата вместе с пассажирами равна m = 2220 кг. Аэростат наполняют гелием. При каком минимальном объёме оболочки аэростата возможно воздухоплавание? Плотность гелия равна $\rho_г$ = 0,18 кг/м^3, а плотность воздуха $\rho_в$ = 1,29 кг/м^3. Объёмом корзины и пассажиров пренебречь.

198. Вовочка взял дубовый бильярдный шар, погрузил его полностью в воду, а потом отпустил. Шар начал всплывать. Найдите ускорение шара в начальный момент (сразу после отпускания), если известно, что плотность воды равна $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, а плотность дуба равна $\rho_д$ = 800 кг/м^3. Будет ли ускорение шара меняться по мере всплывания?

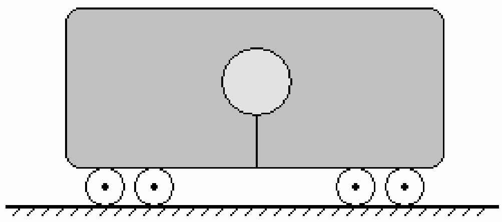
199. Масса воздушного шара вместе с пассажирами равна M = 180 кг, а его объём равен V = 150 м^3. Шар опускается с постоянной скоростью. Какую массу балласта нужно сбросить с шара, чтобы он начал подниматься с такой же скоростью? Плотность воздуха $\rho_в$ = 1,29 кг/м^3.

200. На одной чаше весов стоит сосуд с водой, а на другой – штатив, на перекладине которого подвешен груз. Весы находятся в равновесии. Сохранится ли равновесие, если нитку, на которой висит груз, удлинить так, чтобы он полностью погрузился в воду? Если нет, то на какую чашу нужно положить дополнительный груз, чтобы равновесие восстановилось? Чему должна быть равна его масса?



201. Формула (38) для силы Архимеда справедлива лишь в том случае, если сосуд с жидкостью покоится относительно земли. Выведите обобщённую формулу для силы Архимеда для случая, когда вся жидкость вместе с сосудом движется относительно Земли с постоянным ускорением $\vec{a}$.

202. Ко дну вагона-цистерны, заполненной жидкостью, привязан тросом шар, плотность которого меньше плотности жидкости. Когда вагон движется равномерно, сила натяжения троса равна T. Чему будет равна сила натяжения троса при торможении поезда с постоянным ускорением a в установившемся режиме (когда шар установится неподвижно относительно цистерны)? В какую сторону от вертикали отклонится трос?



203. Известно, что буксующий автомобиль легче столкнуть в сторону (поперёк дороги), чем стоящий. По аналогичному механизму автомобиль заносит на поворотах при проскальзывании быстро вращающихся колёс, даже если коэффициент трения достаточно большой (явление заноса). Объясните это явление.
204. Объясните явления, связанные с вращением Земли вокруг своей оси в системе Коперника.
а.) У рек в северном полушарии правый (если смотреть по течению) берег более крутой (размытый), чем левый. Аналогично, на железных дорогах правый рельс изнашивается сильнее. В каком случае это проявляется больше: когда река течёт (поезд едет) вдоль параллели или вдоль меридиана? Какой берег более размыт у рек в южном полушарии?
б.) При стекании воды из ванны, раковины или другого сосуда воронка воды закручивается. В каком полушарии в какую сторону она закручивается (по часовой стрелке или против, если смотреть сверху)? Для простоты рассмотрите это явление на полюсах.
205. Тело свободно падает с высоты H на экваторе Земли. Из-за вращения Земли тело чуть-чуть отклоняется от вертикальной прямой, соединяющей начальное положение тела с центром Земли. На какое расстояние от этой прямой смещается тело при падении? Тело – материальная точка.

§ 19. Принцип детерминированности Ньютона и границы применимости классической механики

Представим, что мы выбрали инерциальную систему отсчёта, и нам известны координаты всех атомов и молекул во Вселенной в некоторый начальный момент времени. Представим, что нам известны также начальные скорости всех молекул и атомов, и все возможные силы, которыми они могут взаимодействовать. Тогда, применяя второй и третий законы Ньютона, мы в принципе сможем рассчитать координаты и скорости всех частиц во Вселенной в любой последующий момент времени (хотя практически это нереально, поскольку придётся решать систему из огромного числа уравнений). То есть, *всё будущее Вселенной как будто бы предопределено*. В этом заключается принцип детерминированности (англ. determine – определять, обусловливать) Ньютона:
Если заданы координаты и скорости всех точек изолированной системы в начальный момент времени, то состояние этой системы в любой последующий момент времени однозначно определено.

Это следует из законов Ньютона. Но хочется думать, что это не так. Все живые существа обладают волей и разумом. Неужели вся их жизнь определена заранее? Вопрос, конечно, сложный. Существует точка зрения, что нам лишь кажется, что все наши действия в жизни мы совершаем по своему выбору. А на самом деле все наши действия предопределены заранее. Но есть и противоположная точка зрения: живые существа «вносят свою лепту» в историю Вселенной.

Неужели механика Ньютона подтверждает первую точку зрения и делает наличие воли у живых существ только кажущимся? Нет, не подтверждает. И сам Ньютон понимал это. Он понимал, что его механика не является всеобъемлющей теорией, описывающей все-все явления во Вселенной. Ему принадлежат знаменитые слова: *«Я не знаю, чем я кажусь миру; мне самому кажется, что я был только мальчиком, играющим на берегу моря и развлекающимся тем, что от времени до времени находил более гладкие камушки или более красивую раковину, чем обыкновенно, в то время как великий океан истины лежал передо мной совершенно неразгаданным».*

Как и все законы физики, законы механики не абсолютно точны. В XX веке выяснилось, что при движении тел со скоростями, близкими к скорости света в вакууме $c = 3\cdot10^8$ м/с, законы Ньютона не работают. На смену законам Ньютона приходят законы теории относительности Эйнштейна. Ещё оказалось, что законы Ньютона не работают в мире микрочастиц. В микромире действуют законы квантовой механики, совсем иной теории, с которой мы кратко познакомимся в 11 классе. Согласно квантовой механике, будущее любой системы не может быть предопределено заранее. Существуют только *вероятности* реализации различных событий.

Законы Ньютона хорошо описывают движение больших тел, если их скорость мала по сравнению со скоростью света.

Таковы границы применимости механики Ньютона.

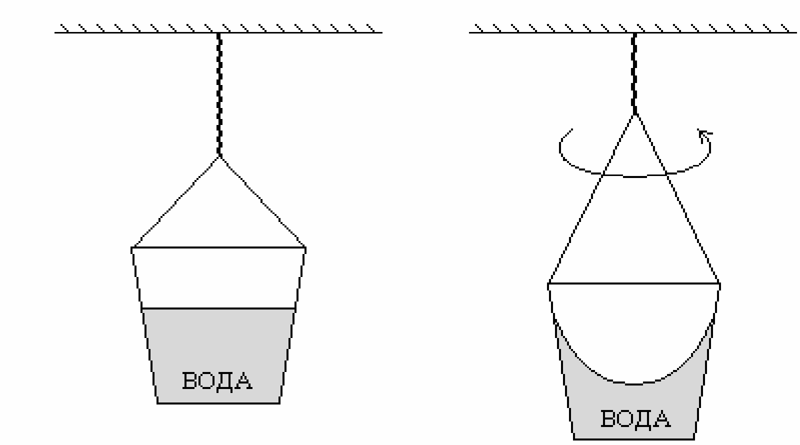
Принцип детерминированности справедлив лишь приближённо, в рамках этих границ.

Механика, основанная на законах Ньютона, называется классической механикой.

Несмотря на ограниченность своей применимости, механика Ньютона и по сей день остаётся одной из самых стройных, чётко сформулированных и красивых физических теорий. Гениальные труды Ньютона определили путь развития науки на несколько веков (после его века) вперёд. Окружающие нас тела с большой точностью подчиняются законам Ньютона, поскольку они большие (состоят из огромного числа молекул) и движутся медленно по сравнению со скоростью света.

§ 20. Выделенность инерциальных систем отсчёта

Рассмотрим опыт, проделанный Ньютоном. Ведро подвесили в земной лаборатории на скрученных верёвках и отпустили. Когда ведро раскрутилось, вода поднялась по стенкам ведра и приняла такую конфигурацию, чтобы действующие на неё силы сообщали ей нужное центростремительное ускорение.



Однако если мы сядем на карусель, в центре которой есть неподвижная подставка с ведром с водой, то мы увидим, что вода не поднимается по стенкам, несмотря на то, что ведро вращается относительно нас так же, как в лаборатории. Почему в первом случае вода поднимается по стенкам, а во втором – нет? Вы можете сказать, что система отсчёта, связанная с землёй, инерциальная, а связанная с каруселью – нет. Это так, но почему? Почему одни системы отсчёта инерциальные, а другие – нет? Чем объясняется такая выделенность?

Ньютон объяснял этот результат на основе представлений об *абсолютном пространстве*. В первом случае (в лаборатории) ведро вращается относительно абсолютного пространства, и центростремительное ускорение вызывается силами в соответствии со вторым законом Ньютона, а во втором случае (на неподвижной относительно земли подставке) ведро не вращается относительно абсолютного пространства или вращается с гораздо меньшей угловой скоростью. Во втором случае ускорение точек воды не связано с силами, а связано только с нашим вращением относительно абсолютного пространства. Можно сказать, что система отсчёта, связанная с Землёй, «более инерциальная», чем система, связанная с каруселью.

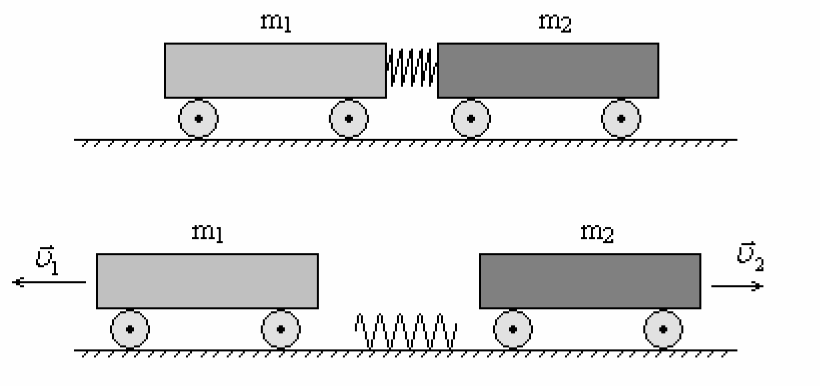
Существуют, по крайней мере, две точки зрения о пространстве:

1. оно существует независимо от материальных тел;
2. пространство не имеет смысла без находящихся в нём тел.

Если справедлива вторая точка зрения, то абсолютного пространства не существует. Большинство современных физиков придерживаются второй точки зрения (хотя здесь требуется множество уточнений). При этом объяснить, почему одни системы отсчёта являются инерциальными, а другие – нет, становится сложнее (вообще, такие вопросы теоретической физики сложны и обычно не обсуждаются в школе). Впервые это удалось сделать одному из гениальнейших физиков в истории человечества Альберту Эйнштейну (1879-1955) при создании общей теории относительности. Об этой теории мы кратко поговорим в 11 классе.

§ 21. Введение

Рассмотрим опыт. На горизонтальном столе стоят две тележки массами m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг. Экспериментатор зажал между тележками пружину и удерживает их неподвижно. Если тележки отпустить, они придут в движение под действием силы упругости пружины и приобретут какие-то скорости $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$. Если силы трения пренебрежимо малы, то эти скорости в дальнейшем не будут меняться, и их легко измерить.



Измерив скорости, мы получим очень интересный результат: скорость первой тележки (более лёгкой) по модулю в 2 раза больше, чем скорость второй (более тяжёлой): $\upsilon_1 = 2\upsilon_2$. Если бы масса второй тележки была в 3 раза больше массы первой, то выполнялось бы равенство $\upsilon_1 = 3\upsilon_2$. Отношение скоростей определяется отношением масс: во сколько раз масса второй тележки больше массы первой, во столько же раз скорость второй тележки меньше скорости первой. Математически это можно записать так:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Или так:

$$m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \quad (39)$$

Причём этот результат не зависит от того, какая пружина была зажата между тележками. Вместо пружины можно зажать кусок резины, баскетбольный мяч или любое другое тело. Скорости тележек будут разными в зависимости от того, какое тело мы зажимаем и сколь сильно мы его деформируем, но отношение скоростей всегда будет одинаковым. Как же объяснить этот интересный результат?

Мы уже знаем, что все задачи динамики можно решить с помощью законов Ньютона. Возможно, вы уже догадываетесь, что в этой задаче «замешан» третий закон Ньютона. Тележки взаимодействуют друг с другом через пружину, и силы взаимодействия равны по модулю:

$$F_{12} = F_{21}$$

По второму закону Ньютона $F_{12} = m_2a_2$, $F_{21} = m_1a_1$, и мы получаем

$$m_1a_1 = m_2a_2 \quad (40)$$

Отсюда можно получить соотношение (39). Если бы силы F_{12} и F_{21} не менялись со временем, то движение было бы равноускоренным, и мы могли бы записать: $a_1 = \dfrac{\Delta\upsilon_1}{\Delta t}$, $a_2 = \dfrac{\Delta\upsilon_2}{\Delta t}$. Подставляя это в формулу (40) и умножая на Δt, мы получим формулу (39). Однако на самом деле силы F_{12} и F_{21} меняются со временем. Поэтому чтобы получить (39) из (40) нужно *проинтегрировать* равенство (40).

Возможно, вы ещё не изучали интегралы и не знаете, что значит «проинтегрировать». Однако природа подсказывает нам, что есть более простой и изящный путь решения этой задачи. Ведь полученный в опыте результат (формула (39)) очень простой, и он не зависит от того, какое тело зажато между тележками и как меняются со временем силы взаимодействия тележек. Оказывается, можно сформулировать простой и удобный закон, объясняющий этот опыт и многие другие явления. Этот закон называется *законом сохранения импульса*.

Импульс – новая физическая величина, которую мы введём в следующем параграфе. Она обладает замечательным свойством: импульс системы тел при определённых условиях **сохраняется** неизменным независимо от того, что в этой системе происходит. Подобным свойством обладает уже известная вам величина – энергия. Законы сохранения импульса и энергии играют очень важную роль в физике. Благодаря закону сохранения импульса, в описанном выше опыте мы можем не учитывать то, как зависит от времени сила взаимодействия тележек, а рассматривать только *начальное и конечное состояние системы.* С помощью законов сохранения можно рассчитывать столкновения бильярдных шаров или молекул в газе. При этих столкновениях силы, которыми взаимодействуют тела, зависят от времени сложным образом, и вычислить их порой даже невозможно. Но законы сохранения во многих случаях позволяют обойти эту трудность.

§ 22. Импульс материальной точки. Закон изменения импульса

Сначала мы введём определение импульса для одной материальной точки.

Запишем формулу второго закона Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Предположим, что движение равноускоренное. Тогда можно записать: $\vec{a} = \dfrac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{\Delta t}$.

Подставляя это выражение во второй закон Ньютона, получим: $\vec{F} = \dfrac{m(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)}{\Delta t}$

Умножая обе части этого равенства на Δt, получим:

$$m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1 = \vec{F}\Delta t \qquad (41)$$

В левой части формулы (41) стоят произведения массы на скорость. Такие произведения (только без векторов) нам уже встречались в предыдущем параграфе, когда мы рассматривали опыт с тележками. Это говорит о том, что *удобно ввести новую физическую величину, равную произведению массы на скорость.*

Импульс материальной точки – это векторная величина, равная произведению её массы на её скорость.

Импульс обычно обозначают буквой $\vec{p}$ и определение импульса записывают в виде формулы

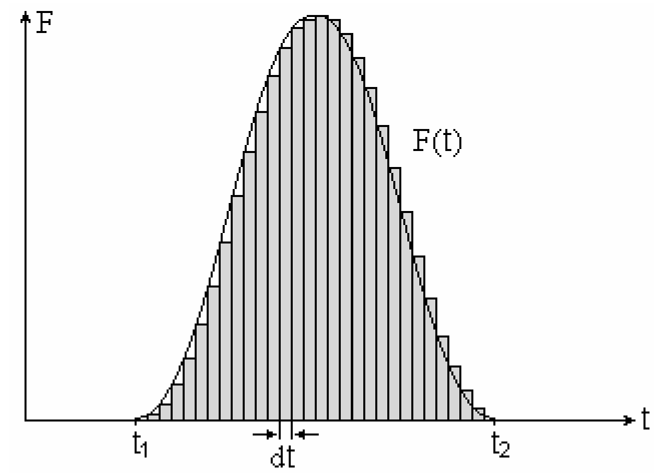
$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

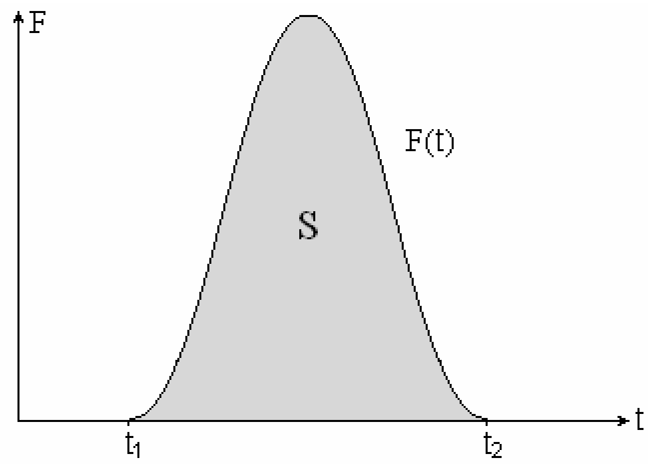
С учётом этого, формулу (41) можно переписать в виде $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}\Delta t$, или

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \qquad (42)$$

Формула (42) – это просто другая формулировка второго закона Ньютона. Эту формулу иногда называют также *законом изменения импульса* (она показывает, как изменяется импульс материальной точки за время Δt).

Мы вывели формулу (42) для случая, когда движение равноускоренное. В этом случае сила, действующая на материальную точку, не меняется со временем. Выясним, как найти $\Delta\vec{p}$, если сила $\vec{F}$ меняется со временем. Рассмотрим график зависимости F(t). При ударе по футбольному мячу зависимость силы от времени имеет примерно такой вид, как показано на рисунке. Допустим, нужно найти изменение импульса мяча за промежуток времени от t_1 до t_2. Для простоты будем считать, что мяч сначала покоился, а сила всё время направлена вдоль одной прямой.





Разобьём промежуток времени от t_1 до t_2 на много одинаковых маленьких отрезков. Длину одного отрезка обозначим двумя буквами: dt. Похожим образом мы раньше обозначали разность: Δt. Новое обозначение dt – это тоже разность, но в данном случае очень малая. Если функция F(t) непрерывна на $[t_1; t_2]$, то, какой бы она ни была, величину dt можно сделать столь малой, что на каждом отрезке времени длиной dt силу F можно приближённо считать постоянной. Для маленького промежутка времени от t до t + dt можно, следуя формуле (42), записать:

$$dp = F(t)dt \qquad (43),$$

где dp – изменение импульса мяча за промежуток времени [t; t + dt], вычисленное приближённо. Величина dp численно равна площади прямоугольника со сторонами dt и F(t).

Сумма площадей всех таких прямоугольников приближённо равна изменению импульса мяча за время от t_1 до t_2. Чем меньше dt, тем меньше сумма площадей отличается от точного значения изменения импульса. Когда dt стремится к нулю, сумма площадей стремится к точному значению изменения импульса.

Теперь заметим, что когда dt стремится к нулю, сумма площадей стремится к площади S фигуры под графиком (рис. справа). Таким образом, изменение импульса равно площади фигуры под графиком F(t). Если направление силы меняется со временем, нужно рассматривать её проекции на оси координат. Если графиком F(t) является прямая, площадь S легко вычислить. Подобным образом поступали при выводе формул для равноускоренного движения. Там находили площадь под графиком скорости от времени.

Если тело движется не по прямой, то вместо формулы (43) можно записать три формулы для изменения проекций импульса за малый промежуток времени dt:

$$dp_x = F_x(t)dt, \quad dp_y = F_y(t)dt, \quad dp_z = F_z(t)dt.$$

Мы помним, что если справедливы равенства трёх проекций, то справедливо и векторное равенство:

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt \qquad (44)$$

Формула (44) выражает закон изменения импульса для случая переменной силы.

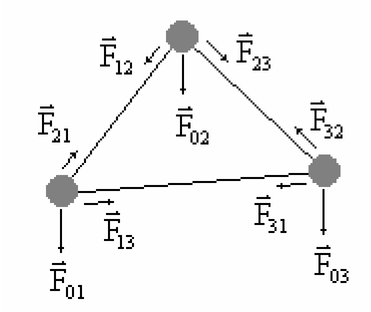
§ 23. Импульс системы тел. Закон сохранения импульса

Всякое реальное тело или систему тел можно рассматривать как систему материальных точек. Для этого нужно тело мысленно разбить на много маленьких элементов, каждый из которых можно считать материальной точкой. Форма элементов не имеет значения, т.к. они очень маленькие. Введём определение импульса системы материальных точек.

Импульс системы материальных точек – это векторная сумма импульсов всех материальных точек этой системы:

$$\vec{p}_{сист} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots$$

Представим, что у нас есть система из нескольких материальных точек. На рисунке изображена система из трёх шариков, связанных невесомыми резиновыми жгутами (вообще, число точек в системе может быть любым, и все проведённые здесь рассуждения останутся справедливыми). Пусть на систему действуют внешние силы $\vec{F}_{01}$, $\vec{F}_{02}$, $\vec{F}_{03}$, … (это могут быть, например, силы тяжести или любые другие силы). Для каждой материальной точки можно записать формулу (42) или (44). Формула (44) более общая, но мы запишем формулу (42), т.к. она нам более привычна по обозначениям. Все дальнейшие рассуждения можно повторить и для формулы (44).



Итак, пишем: $\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_1\Delta t$, $\Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_2\Delta t$, $\Delta\vec{p}_3 = \vec{F}_3\Delta t$, …, где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, … – векторные суммы всех сил, действующих на первую, вторую, третью и так далее точки системы. Сложим все записанные формулы. Получим: $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_3 + ... = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...\right)\Delta t$, или

$$\Delta\vec{p}_{сист} = \vec{F}\Delta t \qquad (45),$$

где $\Delta\vec{p}_{сист}$ – изменение полного импульса системы, а $\vec{F}$ – сумма всех (и внешних, и внутренних) сил, действующих на точки системы. Распишем подробнее, чему равна величина $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \vec{F}_{03} + ... + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32} + ...)$$

В скобках стоит сумма всех внутренних сил, действующих в системе. Как вы думаете, чему она равна? Ответ на этот вопрос даёт третий закон Ньютона: тела взаимодействуют силами, равными по модулю и противоположными по направлению. Это значит, что $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$, $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$ и так далее. Поэтому ***сумма всех внутренних сил***, которая записана в скобках, ***равна нулю***. Получается, что $\vec{F} = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \vec{F}_{03} + ... = \vec{F}_{внеш}$, где $\vec{F}_{внеш}$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему. Формула (45) превращается в формулу

$$\boxed{\Delta\vec{p}_{сист} = \vec{F}_{внеш}\Delta t \qquad (46)}$$

Из формулы (46) следует важный вывод: **импульс системы могут изменить только внешние силы.** Эта формула выражает *закон изменения импульса системы*. Если же сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс этой системы сохраняется неизменным.
В инерциальных системах отсчёта импульс системы материальных точек сохраняется, если векторная сумма всех внешних сил, действующих на точки этой системы, равна нулю.
Так звучит **закон сохранения импульса.**
Чтобы воспользоваться этим законом для решения задач, нужно записать равенство $\Delta\vec{p}_{сист} = 0$ в виде $\vec{p}_{нач} = \vec{p}_{кон}$ (импульс системы в начальный момент времени равен импульсу в конечный момент).
Отметим еще два следствия из формулы (46).

1. В ряде случаев можно считать, что импульс системы сохраняется, если $F_{внеш} \neq 0$, но Δt очень мало. Например, при столкновении тел на них могут действовать силы трения, сумма которых не равна нулю.

2. Возможно, что импульс системы меняется со временем, но проекция импульса на какую-нибудь ось сохраняется. Так происходит, например, при выстреле незакреплённой пушки. Импульс системы “пушка – снаряд” не сохраняется, но сохраняется его проекция на горизонтальную ось.

Задачи

206. Пользуясь определением импульса материальной точки, определите, в каких единицах измеряется импульс. Эта единица не имеет специального названия и выражается через килограммы, метры и секунды.
207. Найдите импульс тела массой $m = 5$ кг, движущегося со скоростью $\upsilon = 5$ м/с.
208. В опыте с двумя тележками, описанном в §21, масса первой тележки равна $m_1 = 2$ кг, а масса второй тележки $m_2 = 3$ кг. После того, как пружина отпала от тележек, скорость первой тележки ока-

залась равной υ_1 = 0,6 м/с. Найдите скорость второй тележки. При решении используйте закон сохранения импульса.

209. В опыте с двумя тележками, описанном в §21, подразумевалось, что масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массами тележек. Будет ли выполняться равенство $m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2$ в случае, если это не так? Будет ли выполняться закон сохранения импульса для этой системы?

210. Человек массой m_1 = 70 кг, бегущий со скоростью υ_1 = 7 м/с, догоняет тележку массой m_2 = 30 кг, движущуюся со скоростью υ_2 = 2 м/с и вскакивает на неё. С какой скоростью будет двигаться тележка после этого?

211. Человек выпрыгнул из неподвижной лодки на берег. Скорость человека относительно берега сразу после прыжка направлена почти горизонтально и равна υ_1 = 4 м/с. Масса человека равна m_1 = 60 кг, а лодки m_2 = 120 кг. Чему равна скорость лодки относительно берега сразу после прыжка? Сопротивлением воды и воздуха пренебречь.

212. Парусная лодка стоит неподвижно относительно воды. Можно ли заставить её двигаться, надувая паруса с помощью насоса, установленного на её борту? А если насос установлен на другой лодке?

213. Парусная лодка стоит неподвижно относительно воды. Можно ли заставить её двигаться с помощью мощного вентилятора, установленного не её борту, если парусов нет вообще?

214. Могут ли осколки взорвавшейся гранаты лететь в одном направлении, если до взрыва граната покоилась? А если двигалась?

215. Три сцепленных вагона, движущиеся со скоростью V = 0,4 м/с, догоняют четвёртый вагон, стоящий неподвижно, и сцепляются с ним. Чему равна скорость вагонов после сцепки, если массы всех вагонов одинаковы?

216. Вагонетка массой M = 400 кг движется со скоростью υ = 0,6 м/с. На вагонетку сверху насыпают уголь. Масса угля равна m = 200 кг. Чему стала равна скорость вагонетки после насыпания угля? Трением при движении вагонетки пренебречь.

217. Электропоезд трогается с места и разгоняется под действием тяговой силы электровоза, равной F = 15 кН. Чему равен импульс поезда спустя t = 6 с после начала движения? Трением качения пренебречь.

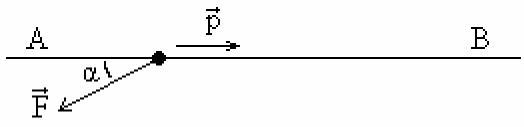
218. При торможении на автомобиль действует сила трения, равная F = 5880 Н. Автомобиль снизил скорость от начальной до нуля за t = 3,4 с. Чему был равен импульс автомобиля до начала торможения? Чему равна масса автомобиля, если его скорость до начала торможения была равна V = 72 км/ч?

219. Почему ствол ручного гранатомёта открыт с двух концов?

220. Скорострельность автомата равна 300 патронов в минуту. Масса каждого патрона равна m = 10 г, а скорость патрона на выходе из ствола равна υ = 300 м/с. С какой силой приклад автомата давит на плечо при стрельбе? Считать, что автомат при стрельбе остаётся практически неподвижным.

221. Что такое реактивное движение и реактивная сила с точки зрения закона сохранения импульса?

222. Материальная точка движется равномерно по прямой AB, обладая импульсом p = 1 кг·м/с. На точку начинает действовать постоянная сила F = 1 Н, направленная под углом α = 30° к прямой AB (см. рис.) Через какое время после начала действия силы скорость материальной точки будет направлена перпендикулярно прямой AB?

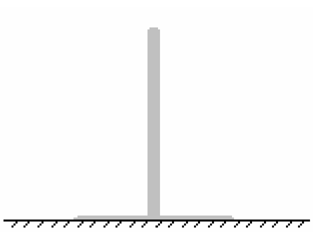


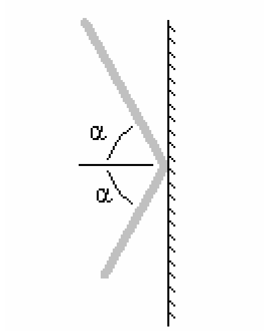
223. Охотник, сидевший в неподвижной надувной лодке, выстрелил из ружья. Патрон вылетел из ствола со скоростью 320 м/с под углом 60° к горизонту относительно воды. С какой скоростью стала двигаться лодка? Масса охотника вместе с лодкой равна 70 кг, а масса патрона равна 35 г.

224. Скорость пушки массой M = 300 кг сразу после выстрела оказалась равной υ_1 = 10 м/с. Снаряд вылетел из ствола под углом 60° к горизонту со скоростью υ_2 = 200 м/с относительно земли. Чему равна масса снаряда, если до выстрела пушка была неподвижна?

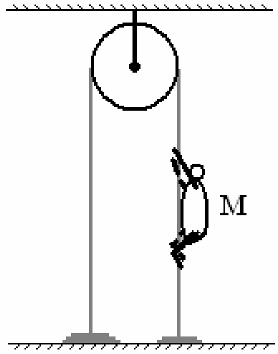
225. По горизонтальному пути катится тележка массой M = 7 кг со скоростью υ = 3 м/с. На тележку положили кирпич массой m = 3,5 кг. Через некоторое время в дне тележки открылся люк, и кирпич выпал. С какой скоростью стала двигаться тележка? Трением качения пренебречь.

226. По реке плывёт плот массой 100 кг со скоростью 1 м/с. На плот запрыгивает с берега мальчик массой 50 кг. Горизонтальная составляющая скорости мальчика равна 1,5 м/с и направлена перпендикулярно скорости плота. С какой скоростью и под каким углом к берегу стал двигаться плот после этого? Сопротивлением при движении плота пренебречь.
227. Два куска пластилина массами m_1 и m_2, движущиеся в перпендикулярных направлениях со скоростями υ_1 и υ_2, сталкиваются и слипаются в один кусок. Чему равна скорость слипшегося куска сразу после столкновения?
228. Человек массой 70 кг переходит с одного конца лодки на другой. Длина лодки равна 5 м, а её масса равна 280 кг. На какое расстояние сместилась лодка относительно воды? Считать, что человек двигался относительно лодки с постоянной скоростью. Сопротивлением при движении лодки пренебречь.
229. С лодки массой 100 кг, движущейся со скоростью 1 м/с, прыгает мальчик массой 50 кг в горизонтальном направлении. Скорость мальчика относительно лодки равна 5 м/с. Чему стала равна скорость лодки после прыжка, если мальчик прыгает
а.) с кормы в сторону, противоположную движению лодки?
б.) с носа по ходу движения лодки?
230. Двое туристов в лодках находятся на поверхности озера. Носы лодок направлены навстречу друг другу. Один турист перекидывает другому конец верёвки, и каждый тянет верёвку на себя. Масса первого туриста вместе с лодкой $m_1 = 100$ кг, а верёвка движется относительно его лодки со скоростью $u_1 = 1$ м/с. Масса второго туриста с лодкой $m_2 = 130$ кг, а верёвка движется относительно его лодки со скоростью $u_2 = 0{,}6$ м/с. Найти скорость каждой лодки и верёвки относительно воды. Силы сопротивления воды, действующие на лодки, равны по модулю. Лодки вначале неподвижны.
231. Шарик массой 100 г свободно падает на горизонтальную площадку, имея в момент полета к ней скорость 10 м/с. Шарик отскакивает от площадки абсолютно упруго (его скорость по модулю одинакова до и после удара). Найдите изменение импульса шарика при ударе о площадку. Найдите также среднюю силу, действующую на шарик во время удара, если удар длился 0,01 с.
232. Кусок пластилина массой 60 г свободно падает на горизонтальную площадку с высоты 5 м и прилипает к ней. Найдите изменение импульса пластилина при его ударе о площадку. Найдите также среднюю силу, действующую на пластилин во время удара, считая, что удар длился 0,05 с.
233. Пуля от пневматического пистолета попадает в стену, имея при этом скорость $\upsilon = 60$ м/с, и отражается от стены абсолютно упруго. Угол между линиями движения пули до и после удара равен $\alpha = 90°$. Найдите изменение импульса пули при ударе, если масса пули равна $m = 3$ г.
234. Шарик массой 20 г налетает на другой шарик массой 30 г, имея при этом скорость 12 м/с. Другой шарик до столкновения покоился. После удара первый шарик полетел в направлении, перпендикулярном его скорости до удара, а второй шарик полетел под углом 30° к направлению движения первого шарика до удара. Найдите скорости шариков после столкновения.
235. Металлический шарик, движущийся со скоростью 5 м/с, налетает на второй шарик такого же радиуса. Плотность второго шарика в 3 раза меньше, чем плотность первого, и до столкновения он покоился. После столкновения оба шарика разлетелись под углом 60° к направлению движения первого шарика до удара. Найдите скорости шариков после столкновения.
236. Материальная точка массой 1 кг равномерно движется по окружности со скоростью 10 м/с. Найдите изменение импульса материальной точки
а.) за четверть периода обращения;
б.) за половину периода обращения;
в.) за период обращения.
237. На горизонтальное дно ванны падает вертикальная струя воды. После удара о дно вода растекается в горизонтальных направлениях (рис. слева). Скорость струи вблизи дна равна $\upsilon = 8$ м/с, а площадь поперечного сечения струи вблизи дна равна $S = 1$ см^2. С какой силой струя воды давит на дно ванны? Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м^3.





238. Струя воды падает на вертикальную стену под углом $\alpha = 60°$ и отражается от неё абсолютно упруго (модуль скорости до и после отражения одинаков, угол падения равен углу отражения, см. рис. справа). Скорость струи равна $\upsilon = 12$ м/с, а площадь её поперечного сечения равна $S = 6$ см^2. С какой силой струя воды давит на стену? Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м^3.
239. Человек массой m движется на тележке массой M со скоростью υ_0 и догоняет пустую тележку массой M, стоящую неподвижно. Приблизившись к пустой тележке, человек перепрыгивает в неё. Скорость человека относительно первой тележки в наивысшей точке траектории равна u. Найдите скорости обеих тележек после прыжка.
240. По двум параллельным рельсовым путям едут во встречных направлениях две одинаковые вагонетки массой M. На каждой вагонетке стоит рабочий массой m. Когда вагонетки сблизились, каждый из рабочих перепрыгнул на противоположную вагонетку (рабочие не столкнулись). После этого первая вагонетка остановилась, а вторая стала двигаться со скоростью υ. Найдите скорости вагонеток до прыжков.
241. Артиллерийский снаряд достиг наивысшей точки траектории, находящейся на высоте $h = 100$ м над землёй, имея при этом скорость $\upsilon_0 = 100$ м/с. В наивысшей точке снаряд разорвался на 2 осколка массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг. Осколок массой m_2 продолжал двигаться в прежнем направлении со скоростью $\upsilon_2 = 250$ м/с. Найдите расстояние между точками падения осколков на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.
242. Зенитный снаряд, выпущенный вертикально, достигнув максимальной высоты, разорвался на 3 осколка. Два из них разлетелись под прямым углом друг к другу, причём скорость одного из них, массой 9 кг, равна 60 м/с, а скорость другого, массой 18 кг, равна 40 м/с. Найдите массу третьего осколка, если он полетел со скоростью 200 м/с.
243. Граната, летевшая со скоростью 10 м/с, разорвалась на 2 осколка. Больший из осколков, масса которого составила 60% от всей массы гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении со скоростью 25 м/с. Найдите скорость меньшего осколка.
244. Акробат массой 50 кг прыгает, держа в руках камень массой 5 кг. Начальная скорость акробата равна $\upsilon_0 = 6$ м/с и направлена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. В наивысшей точке траектории он бросает камень назад со скоростью $u = 2$ м/с относительно себя. На сколько увеличится в результате этого дальность прыжка акробата?
245. С корабля массой $M = 500$ т произведён выстрел из пушки в сторону, противоположную его движению. Снаряд массой $m = 30$ кг вылетел под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $\upsilon = 1$ км/с относительно корабля. На сколько изменилась при этом скорость корабля?
246. По горизонтальному пути катится тележка массой $M = 8$ кг со скоростью $\upsilon = 3$ м/с. На тележку кладут кирпич массой $m = 3{,}5$ кг, предоставив его свободному падению на очень малом расстоянии от её дна. Кирпич прошёл относительно тележки путь $l = 39$ см. Найдите коэффициент трения между кирпичом и дном тележки. Трением в колёсах тележки пренебречь.
247. Канат перекинут через лёгкий блок, который может вращаться на своей оси почти без трения. Концы каната сложены на полу так, как показано на рисунке. Человек массой M удерживается на канате на постоянной высоте от пола, стравливая свой конец каната вниз. С какой скоростью при этом движется канат? Линейная плотность каната (масса единицы его длины) известна и равна λ.



248. На неподвижной тележке стоят два мальчика одинаковой массы. Мальчики спрыгивают с тележки в горизонтальном направлении, в результате чего тележка приобретает некоторую скорость. В каком случае приобретённая скорость будет больше: если мальчики спрыгнут одновременно или если они спрыгнут по очереди? Скорость мальчиков относительно тележки во всех случаях одинакова. Решив эту задачу, ответьте на вопрос: выгодно ли с точки зрения приобретённой скорости запускать ракеты «выстрелом» (то есть, сжигая всё топливо как можно быстрее)?

249. Производится запуск ракеты начальной массой М. Скорость истечения газов из сопла двигателя равна υ. При каком минимальном расходе топлива (массы в единицу времени) реактивная сила в начальный момент будет достаточной, чтобы

а.) уравновесить действующую на ракету силу тяжести?

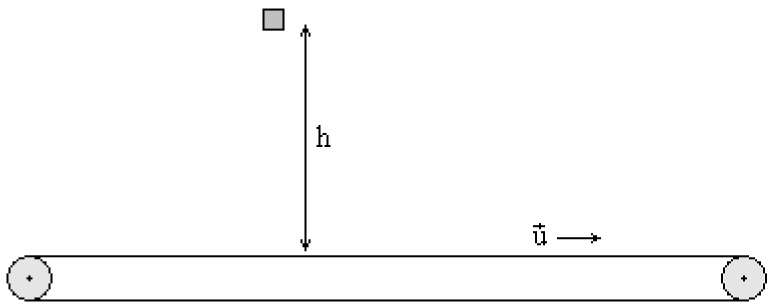
б.) сообщить ракете ускорение $a = 2g$?

250. Из сопла ракеты, начальная масса которой равна М, выбрасываются продукты сгорания топлива порциями, масса которых равна m, со скоростью υ относительно ракеты. Найдите скорость ракеты относительно земли после выпускания пяти таких порций. Начальная скорость ракеты равна нулю. Сопротивлением воздуха и силой тяжести пренебречь.

251. По плоскому склону, образующему угол α с горизонтом, скатывается пушка массой М. В момент, когда скорость пушки равна υ_0, пушка стреляет и под действием силы отдачи останавливается. Снаряд полетел в горизонтальном направлении относительно земли, причём его импульс сразу после выстрела был равен р, а его масса много меньше массы пушки. Найти длительность выстрела.

252. Тело равномерно движется по окружности в инерциальной системе отсчёта. За время $\tau = 1$ с, равное четверти периода обращения, импульс тела изменяется на $|\Delta\vec{p}| = 2$ кг·м/с. Найдите модуль векторной суммы всех сил, действующих на тело.

253. Лента конвейера движется со скоростью u = 0,3 м/с. На ленту с высоты h = 1 м свободно падает маленький кусочек силикона. Он испытывает абсолютно упругое соударение с конвейером, но при этом возникает слабое трение с коэффициентом $\mu = 0{,}02$. Затем кусочек много раз подпрыгивает на конвейере. Найдите перемещение кусочка относительно земли, совершённое между первым и третьим ударом о конвейер.



254. Ученик пришёл к первому уроку, но в этот день первый урок отменили. Он стоял и смотрел на дождь за окном. Капли дождя движутся с постоянной скоростью $\upsilon = 10$ м/с (из-за сопротивления воздуха) под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. Попадая на стекло, они стекают по нему вертикально. В одном кубометре воздуха находятся n = 200 капель, а масса одной капли равна $m_0 = 150$ мг. С какой силой поток дождя действует на оконное стекло площадью S = 5 м^2? Вязким трением между каплями и стеклом пренебречь (считать, что вертикальная составляющая скорости капель не меняется).

§ 24. Центр масс и центр тяжести. Теорема о движении центра масс

Находить импульс системы, разбивая её на маленькие элементы, неудобно. Поставим следующий вопрос. Можно ли тело или систему тел общей массой $m_{сист}$ заменить одной материальной точкой такой же массы так, чтобы импульс этой точки всегда был равен импульсу системы? Координаты этой точки должны быть выражены через координаты всех материальных точек системы. Только тогда замена будет удобна.

Предположим, что мы нашли такую точку, т.е. нашли способ выразить её координаты через координаты точек системы. Пусть $\vec{\upsilon}_C$ – скорость этой точки, а $\vec{r}_{0C}$ – её радиус-вектор в некоторый момент времени t. Пусть $\vec{r}_C$ – радиус-вектор этой точки спустя Δt после этого. Запишем равенство, в левой части которого стоит импульс системы, а в правой части – импульс искомой точки.

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \ldots + m_n\vec{\upsilon}_n = m_{сист}\vec{\upsilon}_C \qquad (47)$$

где m_1, m_2, … , m_n – массы материальных точек системы, n – их число, $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, ... , $\vec{\upsilon}_n$ – их скорости. Вспомним определение скорости: $\vec{\upsilon} = \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\Delta t}$, где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки в некоторый момент времени t, а $\vec{r}$ – радиус-вектор этой точки спустя Δt после этого, причём Δt стремится к нулю. В формуле (47) выразим все скорости через радиус-векторы точек и умножим обе части равенства на Δt. Получим:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n - \left(m_1\vec{r}_{01} + m_2\vec{r}_{02} + \ldots + m_n\vec{r}_{0n}\right) = m_{сист}\vec{r}_C - m_{сист}\vec{r}_{0C}\text{, откуда}$$

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_{сист}} + \vec{r}_{0C} - \frac{m_1\vec{r}_{01} + m_2\vec{r}_{02} + \ldots + m_n\vec{r}_{0n}}{m_{сист}}.$$

Радиус-вектор $\vec{r}_C$ искомой точки не должен зависеть от радиус-вектора $\vec{r}_{0C}$ в какой-то предыдущий момент времени (иначе он зависел бы от того, какой момент в прошлом мы выберем). Поэтому $\vec{r}_{0C} - \dfrac{m_1\vec{r}_{01} + m_2\vec{r}_{02} + \ldots + m_n\vec{r}_{0n}}{m_{сист}} = \vec{C}$ – некоторый не меняющийся со временем вектор, который можно выбрать произвольно. Удобнее всего выбрать $\vec{C} = 0$. Точка, выбранная таким образом, называется *центром масс.* Сформулируем определение. ***Центр масс – это точка, радиус-вектор которой выражается через радиус-векторы материальных точек системы по формуле***

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (48).$$

Проецируя это равенство на ось Ox, получим, что координата x центра масс находится по формуле

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (49).$$

Теперь формулу второго закона Ньютона можно записать для любого тела, а не только для движущегося поступательно. $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение центра масс тела. Это утверждение называется **теоремой о движении центра масс.** Доказать её легко. Импульс тела равен импульсу центра масс (напомним, что мы специально так выбирали центр масс, чтобы его импульс был равен импульсу тела). Поэтому для центра масс верна формула $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$. Но в параграфе 22 мы доказали, что формула $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ эквивалентна формуле $\vec{F} = m\vec{a}$. Таким образом, теорема доказана.

Центр масс – удобное понятие. У многих тел его легко найти из соображений симметрии. Однако не всегда вместо движения тела достаточно рассматривать движение центра масс. Например, мы скоро узнаем, что кинетическая энергия тела не всегда равна кинетической энергии его центра масс.

Следует различать понятия “центр масс” и “центр тяжести”. Центр тяжести – это, по определению, точка приложения силы тяжести. Уточним, что такое точка приложения силы. Если к какой-то точке тела прикреплена нить, и мы за неё тянем, то эта точка является точкой приложения силы. В этом случае мы действуем только на одну точку тела. Земля, в отличие от нашего случая, действует на всё тело (на все материальные точки, из которых оно состоит). Сила, которую мы называем силой тяжести, состоит из многих частей, маленьких сил, действующих на отдельные материальные точки. Такую силу можно назвать сложной (т.е. состоящей из многих частей). Точка приложения силы тяжести – та, относительно которой сумма моментов всех маленьких сил равна нулю. ***Точка прило-***

жения силы – такая точка, относительно которой сумма моментов всех составляющих её сил равна нулю. Таких точек можно выбрать бесконечно много. Они не связаны с телом и лежат на прямой, называемой линией действия силы. Но *центр масс всегда является одной из точек приложения силы тяжести*, т.е. одним из центров тяжести. Это позволяет находить центр масс, не пользуясь определением, а записывая правило моментов (или правило рычага) и сокращая его на ускорение свободного падения. Вместо сил тяжести можно сразу писать массы.

Задачи

255. На концы твёрдого стержня длиной l = 1 м надеты металлические шарики массами m_1 = 100 г и m_2 = 300 г. На каком расстоянии от более тяжёлого шарика находится центр масс этой конструкции? Стержень считать невесомым.

256. Определите положение центра масс уголка из однородной проволоки (см. рис.), если длины АВ и ВС известны. Введите удобную систему координат и запишите, чему равны координаты центра масс.

257. Лёгкую картонную трубку длиной L, закрытую с нижнего конца, удерживают вертикально. На дне трубки сидит жирная муха, масса которой равна массе трубки. Нижний конец трубки находится на высоте h над столом. Трубку отпускают, и пока она падает, муха успевает перелететь и сесть на её верхний конец. Найдите время падения трубки. Массой дна трубки и сопротивлением воздуха пренебречь.

258. Воздушный шар повис на высоте h = 15 м над землёй. В корзине находится человек массой m_1 = 60 кг. Масса шара и корзины без человека равна m_2 = 180 кг. Человек спускается по верёвочной лестнице. Какой должна быть минимальная длина лестницы, чтобы человек смог спуститься до самой земли?

259. Человек массой 60 кг переходит с одного конца лодки на другой. Длина лодки равна 5 м, а её масса равна 240 кг. На какое расстояние сместилась лодка относительно воды? О зависимости скорости человека от времени ничего не известно. Сопротивлением при движении лодки пренебречь.

260. В опыте с двумя тележками, описанном в §16, подразумевалось, что масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массами тележек. В какую сторону (в сторону более лёгкой или более тяжёлой тележки) будет двигаться пружина после того, как отпадёт от тележек, если это не так?

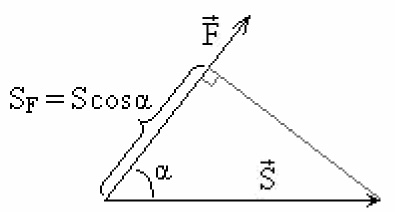
261. В вершинах квадрата ABCD находятся материальные точки массами M_A = 100 г, M_B = 200 г, M_C = 300 г, M_D = 600 г. Найдите положение центра масс системы этих материальных точек. Сделайте рисунок и укажите все необходимые соотношения размеров.

§ 25. Понятие о работе и энергии

Рассмотрим постоянную силу, действующую на одну точку тела (например, силу, действующую на санки со стороны верёвки, за которую их тянут). ***Работой силы называется произведение модулей силы и перемещения её точки приложения на косинус угла между ними:***

$$A = FS\cos\alpha \quad (50)$$

Произведение модулей двух векторов и косинуса угла между ними называется скалярным произведением векторов. Формулу (50) можно записать в векторном виде (51). Из рисунков видно, что скалярное произведение векторов равно проекции одного из них на направление другого, умноженной на модуль другого.



Таким образом, работу можно найти по любой из формул:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{S} \quad (51) \qquad A = F_S S \quad (52) \qquad A = S_F F \quad (53)$$

Если на точку тела действуют несколько сил, то их суммарная работа равна работе их векторной суммы, приложенной к той же точке. Действительно, проекция суммы сил на направление перемещения равна сумме проекций сил на то же направление.

Если сила направлена в ту же сторону, в которую движется тело, то угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$ равен нулю, а косинус нуля равен единице. Поэтому для такого случая получаем:

$$A = FS \qquad (54)$$

В чём заключается важность введённой нами физической величины? Известно, что автомобиль, чтобы преодолеть некоторое расстояние, должен затратить некоторое количество горючего. Количество затраченного горючего пропорционально силе тяги двигателя и пройденному пути. В соответствии с формулой (54), количество затраченного горючего пропорционально работе, совершённой двигателем. Электропоезд или троллейбус при своём движении расходует электроэнергию, количество которой тоже определяется работой, совершённой двигателем. В этих примерах *работа определяет количество затраченной энергии.*

Что такое энергия? Энергией называют нечто, что может быть представлено в разных видах: в виде тепла, света, электричества, движения деталей машин. Это нечто, чем обладают тела или системы. Бензин и другие виды топлива обладают химической энергией, которая при сгорании переходит в другие виды энергии. Энергия относится к таким физическим величинам, определение которых не вводится по формулам (к таким величинам ещё относятся, например, длина и время). Но все виды энергии объединяет одно: *энергия всегда равна работе каких-нибудь сил.*

Если тело или несколько взаимодействующих между собой тел (система тел) могут совершить работу, то говорят, что они обладают энергией.

Например, тепловая энергия – это энергия хаотического (беспорядочного) движения молекул. Чем быстрее движутся молекулы вещества, тем больше его тепловая энергия. Чтобы увеличить скорость молекулы, нужно совершить работу. При трении двух предметов друг о друга мы совершаем работу, и предметы нагреваются. Когда тела остывают, их молекулы сталкиваются с молекулами других тел и совершают работу, отдавая энергию.

Энергия и работа – не одно и то же. Тела не обладают работой. Но для краткости часто говорят, что энергия – это работа каких-то сил. Энергия и работа измеряется в одних и тех же единицах. Единица работы и энергии называется джоулем (Дж) в честь английского учёного Джоуля (1818-1889), изучавшего превращение различных видов энергии друг в друга.

1 Дж = 1 Н·м.

§ 26. Способы вычисления работы некоторых сил. Работа силы тяжести

До сих пор мы рассматривали силу, приложенную к одной точке. А как найти работу силы, действующей на многие точки тела, например, силы тяжести? Нужно найти сумму работ всех маленьких сил, из которых эта сила состоит и каждая из которых приложена к одной материальной точке. Сформулируем 2 утверждения, которые упростят нам поиск работы силы, действующей на много точек.

Утверждение 1. Работу силы тяжести, действующей на любую систему, можно найти по любой из формул (50, 51, 52, 53), где $\vec{S}$ – перемещение центра масс (если ускорение свободного падения одинаково во всех точках).

Доказательство простое. Пусть система состоит из n материальных точек, m_1, m_2, … , m_n – их массы. Рассмотрим ось Ox, направленную вниз, как сила тяжести. Для каждой точки $S_x = \Delta x$. Воспользуемся формулой (53).

$A_{тяж} = g(m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n)$ – это выражение для суммарной работы сил тяжести, действующих на материальные точки системы.

$\Delta x_C = \dfrac{m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n}{m_{сист}}$ – эта формула следует из определения центра масс (записали выражения для конечной и начальной координаты центра масс и из одного вычли другое).

$m_{сист} g\Delta x_C = g(m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n)$ – предыдущую формулу умножили на $m_{сист}g$.

$A_{тяж} = m_{сист} g\Delta x_C$ – приравняли левые части первой и третьей формулы.

Как видим, работу силы тяжести найти очень просто: *она равна силе тяжести, умноженной на изменение высоты центра масс, взятое с соответствующим знаком* (с плюсом, если центр масс опустился, и с минусом, если поднялся).

Теперь рассмотрим абсолютно твёрдое тело и произвольную силу, действующую на много его точек. Пусть существует точка А, которая всегда является точкой приложения силы, и координаты которой всегда выражаются через координаты точек тела по одной и той же формуле. Можно сказать, что точка А жёстко связана с телом. Если она не принадлежит телу, её можно связать с телом невесомым стержнем.

Утверждение 2. Работу силы можно найти по любой из формул (50, 51, 52, 53), где $\vec{S}$ - перемещение точки А. Приведём без доказательства такое утверждение: *силу, действующую на много точек абсолютно твёрдого тела, можно заменить такой же силой, действующей на точку А, и в движении тела ничего не изменится*. Отсюда и следует утверждение 2. Пример такой силы – сила Архимеда, действующая на полностью погруженное в жидкость тело. Точку А можно найти как центр масс жидкости, помещённой на место тела.

До сих пор мы рассматривали случаи, когда модуль и направление силы не меняются со временем. А как вычислить работу переменной силы? *Если сила меняется со временем, то её работу можно найти как площадь под графиком* F_υ *от* L, *где* F_υ *– проекция силы на направление скорости,* L *– пройденный точкой приложения путь*. Откуда это следует? Траекторию точки можно разбить на много очень малых частей, каждую из которых можно считать отрезком, на котором сила постоянна. В точках траектории, в которых скорость равна нулю, F_υ можно взять любым, т.к. одна точка графика или конечное число точек не влияет на площадь под ним. Похожим способом мы находили путь, пройденный при движении с переменной скоростью. Мы разбивали интервал времени на много очень маленьких отрезков, на каждом из которых скорость можно приближённо считать постоянной. У нас получалось, что путь равен площади фигуры под графиком скорости от времени. Таким же способом мы находили изменение импульса тела под действием меняющейся со временем силы.

Если тело движется по прямой и сила направлена вдоль этой прямой, то работа силы находится как площадь под графиком зависимости силы от пройденного пути (или от изменения координаты).

§ 27. Кинетическая энергия материальной точки

Чтобы разогнать тело из состояния покоя до некоторой скорости, на него нужно действовать силой. При этом сила совершает работу, а значит, телу передаётся энергия. При торможении это тело может само совершить работу. Это означает, что *всякое движущееся тело обладает энергией.*

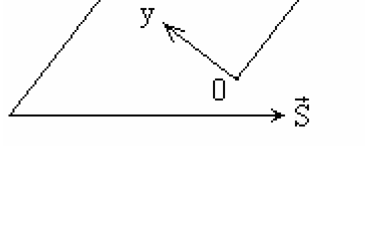
Энергия, которой обладает тело вследствие своего движения, называется кинетической энергией (от греческого «кинема» – движение).

Выясним, как связана скорость материальной точки с её кинетической энергией. Для этого нужно рассчитать, какую работу нужно совершить, чтобы разогнать материальную точку из состояния покоя до некоторой скорости υ (или, в более общем случае, изменить скорость точки от υ_0 до υ). Пусть на материальную точку действует постоянная сила $\vec{F}$. Если на точку действуют несколько сил – мы их можем заменить одной, равной их векторной сумме. Пусть эта точка совершила перемещение $\vec{S}$ в инерциальной системе отсчёта.

В плоскости, в которой лежат векторы $\vec{F}$ и $\vec{S}$, выберем систему координат так, что ось x сонаправлена вектору $\vec{F}$, а ось y перпендикулярна ему.

По формуле (53), $A = S_F F = S_x F_x$.

В инерциальных системах отсчёта выполняется равенство $F_x = m a_x$.



Запишем определение ускорения в проекции на ось x: $a_x = \dfrac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{\Delta t}$.

Имеем: $F_x = \dfrac{m(\upsilon_x - \upsilon_{0x})}{\Delta t}$.

Вспомним формулу из кинематики для S_x: $S_x = \dfrac{\upsilon_x + \upsilon_{0x}}{2}\Delta t$.

Подставим полученные выражения в формулу для работы: $A = \frac{m(\upsilon_x - \upsilon_{0x})(\upsilon_x + \upsilon_{0x})}{2\Delta t}\Delta t$,

или $A = \frac{m\upsilon_x^2}{2} - \frac{m\upsilon_{0x}^2}{2}$.

Проекция силы на ось y равна нулю. Поэтому проекция скорости на ось y не изменяется. Запишем: $\upsilon_y - \upsilon_{0y} = 0$; $\upsilon_y^2 - \upsilon_{0y}^2 = 0$; $\frac{m\upsilon_y^2}{2} - \frac{m\upsilon_{0y}^2}{2} = 0$. К любому выражению можно прибавить ноль, и оно не изменится. Это позволяет нам записать:

$$A = \frac{m\upsilon_x^2}{2} + \frac{m\upsilon_y^2}{2} - \frac{m\upsilon_{0x}^2}{2} - \frac{m\upsilon_{0y}^2}{2} = \frac{m\upsilon_x^2}{2} + \frac{m\upsilon_y^2}{2} - \left(\frac{m\upsilon_{0x}^2}{2} + \frac{m\upsilon_{0y}^2}{2}\right).$$

Из последнего равенства, по теореме Пифагора, следует:

$$\boxed{A = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} \qquad (55)}$$

Из формулы (55) видно, чему равна кинетическая энергия материальной точки. ***Кинетическая энергия материальной точки – это работа, которую должны совершить действующие на неё силы, чтобы она перешла из состояния покоя в данное состояние.*** Согласно формуле (55), кинетическая энергия материальной точки, движущейся со скоростью υ, равна

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad (56)$$

Из формулы (55) видно, в чём заключается удобство таких величин, как работа и энергия, в механике. Предположим, что маленький груз (материальная точка) находится на высоте h над столом. Он спускается по сложной траектории, например, по изогнутой трубе. Стенки трубы гладкие, и можно считать, что трения нет. Сила реакции опоры перпендикулярна скорости и не совершает работы, а работа силы тяжести равна mgh. Какую скорость будет иметь груз в конце спуска? Найти зависимость координат груза и его скорости от времени бывает сложно с точки зрения математики. Если не известно уравнение, описывающее форму трубы, это вообще невозможно. Но скорость в конце спуска найти легко. Применим формулу (55) для работы силы тяжести: $mgh = \frac{m\upsilon^2}{2}$ откуда $\upsilon = \sqrt{2gh}$. Легко также найти скорость груза на любой высоте. Причём форма трубы не имеет значения для скорости; скорость определяется только начальной и конечной высотой.

§ 28. Кинетическая энергия тела. Теорема об изменении кинетической энергии

В предыдущем параграфе мы ввели понятие кинетической энергии для одной материальной точки. Это понятие можно обобщить для системы материальных точек, а значит и для любого тела конечных размеров.

Энергия тела или системы тел – это работа, совершаемая всеми силами, действующими на тело (систему) при его переходе из состояния покоя в данное состояние. Подчеркнём, что имеется в виду суммарная работа всех сил, и внешних, и внутренних. Внутри тела, например, мяча, часто действуют силы упругости. Их работа не всегда равна нулю. Внутри системы могут действовать силы трения. Их работа всегда отрицательна.

Отметим особо, что *энергия хаотического движения молекул не входит в кинетическую энергию тела.* Это так потому, что в механике при описании движения макроскопических (больших) тел переходят от реальных тел к *моделям* либо абсолютно твёрдого, либо деформируемого тела. В этих моделях нет хаотического движения молекул, а есть только упорядоченное движение тела как целого. Энергия хаотического движения молекул при этом включается в отдельный вид энергии – *внутреннюю энергию тела.*

Легко показать, что *кинетическая энергия тела (или системы) равна сумме кинетических энергий материальных точек, из которых оно состоит.* Предположим, мы перевели тело из состояния покоя в некоторое состояние движения. Пусть общая работа всех сил, действовавших на тело, равна А. Все силы, действующие на тело, – это то же самое, что все силы, действующие на его материальные точки. Поэтому общая работа сил, действовавших на материальные точки тела, равна А. Значит, общая кинетическая энергия всех материальных точек тела равна А, как и кинетическая энергия всего тела. Отметим, что поскольку в механике вместо реальных тел рассматривают модели, в которых нет хаотического движения молекул, то в работу А не входит та часть работы сил взаимодействия молекул, которая обусловлена их хаотическим движением.

Заодно мы показали, что кинетическая энергия тела не зависит от того, каким способом его перевели из состояния покоя в данное состояние.

Теперь мы можем сформулировать важное утверждение. Согласно формуле (55), работа сил, действующих на одну материальную точку, равна изменению её кинетической энергии. Кинетическая энергия тела (или системы) равна сумме кинетических энергий его материальных точек. Значит, работа **всех** (и внешних, и внутренних) сил, действующих на тело или систему, равна изменению его кинетической энергии:

$$\boxed{A_{\text{сил}}^{\text{всех}} = \Delta E_k \quad (57)}$$

Это важное утверждение называется теоремой **об изменении кинетической энергии.** Обратим внимание на то, что “изменение” означает, что от конечной энергии нужно отнять начальную, а не наоборот.

Кинетическая энергия тела не всегда равна кинетической энергии его центра масс. Возьмём, к примеру, вращающееся велосипедное колесо. Его кинетическая энергия не равна нулю, даже если центр масс неподвижен. Сформулируем утверждение, позволяющее в некоторых случаях находить кинетическую энергию.

Рассмотрим движение тела в некоторой системе отсчёта XOY. Пусть центр масс движется в ней с некоторой скоростью. Рассмотрим другую систему отсчёта $X_1O_1Y_1$, которая движется относительно системы XOY поступательно со скоростью, равной скорости центра масс. Систему $X_1O_1Y_1$ будем называть системой центра масс. Таких систем можно выбрать сколь угодно много. Начало координат $X_1O_1Y_1$ может совпадать с центром масс, но это не обязательно. Утверждение заключается в следующем. Кинетическая энергия тела в системе XOY равна сумме кинетической энергии центра масс и кинетической энергии тела в системе центра масс:

$$E_k = E_{\text{цм}} + E_{\text{сцм}}$$

Это утверждение справедливо как для тела, так и для системы тел. Его можно оригинально доказать, используя силу тяжести (это материал для дополнительного чтения; его учить не обязательно). Кинетическая энергия не зависит от того, в какую сторону движется центр масс. Пусть система XOY связана с Землёй, а центр масс движется вверх. На тело действует только сила тяжести. Она не влияет на движение любой материальной точки в системе $X_1O_1Y_1$, т.е. ускорения материальных точек в системе $X_1O_1Y_1$ не зависят от силы тяжести, а определяются только внутренними силами (не удивляйтесь, ведь система $X_1O_1Y_1$ не инерциальная). Если интересно, можете убедиться в этом. Нужно записать второй закон Ньютона в системе XOY для одной материальной точки и закон сложения ускорений, чтобы найти ускорение этой точки в системе $X_1O_1Y_1$. Здесь мы для краткости не будем этого делать. Главное – понять, что кинетическую энергию в системе $X_1O_1Y_1$ могут изменить только внутренние силы. Но кинетическая энергия тела в какой-либо один момент времени не зависит от внутренних сил. Поэтому представим, что в начальный момент времени мы убрали все внутренние силы. Возможно, после этого тело “рассыплется” на материальные точки, но от этого не зависит начальная кинетическая энергия. Важно, что после этого кинетическая энергия в системе $X_1O_1Y_1$ не меняется.

Поднявшись на некоторую высоту, центр масс остановится. Это значит, что кинетическая энергия тела уменьшилась на $E_{\text{цм}}$. В момент остановки кинетические энергии тела в системах XOY и $X_1O_1Y_1$ равны, т.к. системы неподвижны относительно друг друга. Значит, кинетическая энергия в системе XOY равна $E_{\text{сцм}}$. Отсюда следует, что в начальный момент кинетическая энергия была равна $E_{\text{цм}} + E_{\text{сцм}}$.

§ 29. Потенциальные и непотенциальные силы. Потенциальная энергия. Энергия тела, поднятого над землёй

Введём полезную классификацию сил. Будем делить силы на потенциальные и непотенциальные. ***Сила называется потенциальной, если при переходе тела, на которое она действует, из одного***

положения в пространстве в другое её работа не зависит от пути перехода. Имеется в виду, что работа не зависит как от длины пути точек, на которые сила действует, так и от маршрута их перемещения. Примеры таких сил – силы тяжести, силы упругой деформации (например, сила упругости пружины). Ранее мы доказали, что работа силы тяжести не зависит от пути центра масс, а зависит только от перемещения.

Отметим, что такое деление сил вводится только для макроскопических тел, т.е. таких, размеры которых много больше размеров молекул, из которых они состоят. Четыре взаимодействия (гравитационное, электростатическое, сильное ядерное и слабое ядерное), к которым сводятся все силы, являются потенциальными, если взаимодействуют материальные точки, молекулы, атомы или элементарные частицы. Сила может быть непотенциальной, только если во взаимодействии участвует много частиц. Примеры непотенциальных сил – сила трения, сила реакции опоры. При работе непотенциальной силы часть механической энергии системы переходит в её *внутреннюю энергию* (энергию хаотического движения молекул и их взаимодействия). Можно сказать, что непотенциальные силы *рассеивают энергию*: энергия упорядоченного движения тела как целого переходит в энергию хаотического движения молекул. Поэтому непотенциальные силы называют диссипативными (от англ. dissipation – рассеивание).

Теперь можно ввести понятие потенциальной энергии системы. Но прежде надо ввести понятие *нормировки потенциальной энергии*.

Нормировка потенциальной энергии – это выбор такого положения системы, в котором потенциальная энергия считается равной нулю.

Потенциальная энергия – это работа, которую совершают все внутренние потенциальные силы системы при её переходе из данного положения в положение с нулевой потенциальной энергией.

В 7 классе мы давали потенциальной энергии такое определение: это энергия взаимодействия тел (потенциальными силами). Теперь мы уточнили это определение.

Потенциальная энергия принадлежит не какому-то из взаимодействующих тел, а системе в целом. Энергия угля, нефти, газа – это потенциальная энергия химических связей, выделяющаяся в реакциях горения. Положение с нулевой потенциальной энергией можно выбирать произвольно. Для Земли и тела, поднятого над ней, этим положением может быть такое, когда тело находится у поверхности Земли, или когда тело поднято на какую-то высоту над ней, или когда тело бесконечно удалено от Земли. При взаимодействии частиц часто принимают за ноль потенциальной энергии положение, когда они бесконечно удалены друг от друга, т.е. когда силами взаимодействия можно пренебречь. За ноль потенциальной энергии пружины принимают положение, когда она не деформирована.

Выясним, как связано изменение потенциальной энергии с работой потенциальных сил. Пусть система перешла из положения 1 (начальное) в положение 2 (конечное), а потом может ещё перейти в состояние 3 с нулевой потенциальной энергией. Работа A_{1-3} внутренних потенциальных сил по переходу из состояния 1 в состояние 3 равна сумме работ A_{1-2} и A_{2-3} по переходу из 1 в 2, а потом из 2 в 3, т.е. $A_{1-3} = A_{1-2} + A_{2-3}$. Но по определению, $A_{1-3} = E_{p0}$, $A_{2-3} = E_p$. Поэтому $A_{1-2} = E_{p0} - E_p$, т.е. *работа внутренних потенциальных сил равна изменению потенциальной энергии системы, взятому с обратным знаком*:

$$A_{\text{пот}}^{\text{внутр}} = -\Delta E_p \qquad (58)$$

Выясним, чему равна потенциальная энергия тела массой m, центр масс которого поднят на высоту h над землёй. За нулевой уровень потенциальной энергии выберем уровень поверхности земли. Тогда, по определению, потенциальная энергия равна работе силы тяжести, совершаемой при опускании центра масс до уровня земли. Сила тяжести равна $F = mg$, а изменение высоты равно h. Работа силы тяжести равна mgh. Имеем:

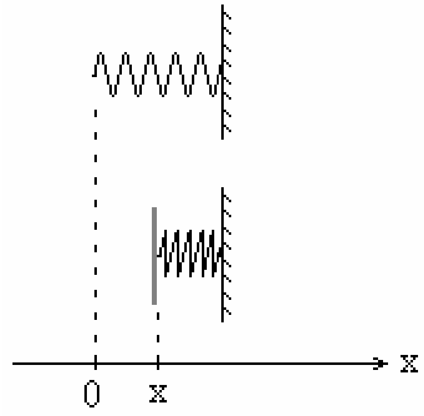
$$E_p = mgh \qquad (59)$$

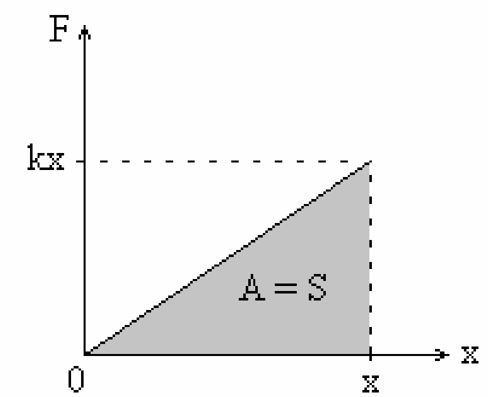
Это формула для вычисления потенциальной энергии тела, поднятого над Землёй. Нулевой уровень потенциальной энергии можно выбирать произвольно, и h будет высотой поднятия центра масс над этим уровнем. Только высота h должна быть много меньше радиуса Земли, иначе ускорение свободного падения будет меняться в зависимости от высоты.

Огромной потенциальной энергией обладает вода в реках, удерживаемая плотинами. Падая вниз, вода совершает работу, приводя в движение турбины гидроэлектростанций.

§ 30. Потенциальная энергия упруго деформированного тела

Рассмотрим пружину с коэффициентом жёсткости k, один конец которой неподвижно закреплён. В начальном положении пружина не деформирована. Примем такое положение пружины за нулевой уровень потенциальной энергии. Сожмём пружину на величину x. При сжатии мы действуем на пружину силой, и эта сила совершает работу. Это означает, что пружине передаётся энергия. Очевидно, что эта энергия потенциальная (а не внутренняя). Ведь при распрямлении пружина может действовать на другое тело и совершить такую же работу, какая была совершена при сжатии. Если сжатую пружину просто отпустить, то она распрямится, не действуя на другие тела, но при этом она будет двигаться, то есть потенциальная энергия перейдёт в кинетическую.





Выясним, чему равна потенциальная энергия сжатой пружины с коэффициентом жёсткости k. Будем медленно сжимать пружину (медленно – чтобы не возникло колебаний, которые описывать мы пока не будем). По закону Гука, сила, которой мы действуем на пружину при сжатии на величину x, равна $F = kx$. Построим график зависимости силы от координаты x сжимаемого конца пружины. Этим графиком является прямая.

В конце параграфа 26 мы установили, что работа переменной силы находится как площадь под графиком зависимости силы от изменения координаты. В нашем случае начальная координата равна нулю (мы так выбрали ось x), и поэтому изменение координаты равно самой координате. Значит, работа силы, которая сжала пружину, равна площади под графиком зависимости силы от координаты x. Эту площадь легко вычислить: площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. Один из катетов равен x, а другой равен kx. Значит, работа силы, сжавшей пружину, а вместе с ней и потенциальная энергия сжатой пружины равна

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \qquad (60)$$

Мы вывели формулу (60) для пружины, сжатой на величину x. Но точно такую же формулу можно вывести и для пружины, растянутой на величину x. Более того, формула (60) справедлива не только для пружины, но и для всякого тела, упругая деформация которого подчиняется закону Гука (например, для металлического стержня или резинового жгута). Формула (60) является общей формулой для энергии упруго деформированного тела. Энергию сжатых и закрученных пружин используют, например, в механических часах и в заводных игрушках.

§ 31. Механический и общефизический законы сохранения энергии

Сумма кинетической и потенциальной энергии системы называется её полной механической энергией или просто механической энергией.

Сделаем важный вывод об этой энергии. Применяя теорему об изменении кинетической энергии, запишем:

$$A_{\text{сил}}^{\text{всех}} = A_{\text{пот}}^{\text{внутр}} + A_{\text{непот}}^{\text{внутр}} + A_{\text{внешних}}^{\text{всех}} = \Delta E_{\text{к}};$$

$$-\Delta E_{\text{р}} + A_{\text{непот}}^{\text{внутр}} + A_{\text{внешних}}^{\text{всех}} = \Delta E_{\text{к}};$$

$$\boxed{A_{\text{непот}}^{\text{внутр}} + A_{\text{внешних}}^{\text{всех}} = \Delta E_{\text{мех}}^{\text{полн}}} \quad (61)$$

Последняя формула показывает, какие силы могут изменить механическую энергию системы. Это все внешние и внутренние непотенциальные силы. Из этой формулы следует *закон сохранения механической энергии*:

В инерциальных системах отсчёта механическая энергия системы сохраняется, если сумма работ внутренних непотенциальных и всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю.

Если рассматривать тела на микроскопическом уровне (уровне молекул, атомов, электронов и других микрочастиц), то внутренних непотенциальных сил не существует среди известных. *Все известные фундаментальные силы потенциальны.* Включив энергию хаотического движения микрочастиц в полную энергию тела или системы, получим, что полную энергию системы могут изменить только внешние силы. Более того, внешние силы переводят энергию от одной системы к другой, не уменьшая и не увеличивая её количество.

Полное количество энергии во Вселенной не изменяется. Это видно из формулы (61): на микроскопическом уровне непотенциальных сил не существует, и внешних сил тоже не существует, так как для целой Вселенной все силы – внутренние.

Энергия не появляется и не исчезает, а только переходит из одного вида в другой.

Так звучит *общефизический закон сохранения энергии*.

Являются ли проведённые выше рассуждения доказательством общефизического закона сохранения энергии? Строго говоря, нет. Дело в том, что при изучении сильных и слабых ядерных взаимодействий применяются методы и расчёты, которые сами опираются на закон сохранения энергии. Если бы мы не были уверены в законе сохранения энергии, мы, скорее всего, не смогли бы изучить ядерные взаимодействия, не смогли бы сделать важные выводы из экспериментов по физике элементарных частиц.

Закон сохранения энергии – один из самых фундаментальных законов природы. Он не доказывается строго, а является результатом обобщения множества экспериментальных фактов и наблюдаемых явлений. Среди простейших таких фактов «золотое правило механики», гласящее, что никакой в мире механизм не даёт выигрыша в работе, невозможность создания вечного двигателя, преобразование кинетической энергии в потенциальную и наоборот при движении различных тел и многочисленные опыты с паровыми машинами и другими устройствами, в которых тепловая (внутренняя) энергия превращалась в механическую энергию и наоборот. Считается, что впервые закон сохранения энергии чётко сформулировал немецкий врач Юлиус Роберт фон Майер (1814-1878). Он заметил, что цвет крови у моряков, переплывших из одной географической широты в другую, меняется. Из этого он сделал потрясающий и смелый для своего времени вывод: «*… имеющаяся однажды налицо энергия не может превратиться в нуль, а только перейти в другую форму …*». Подробно об истории этого открытия вы можете прочитать в дополнительной литературе.

§ 32. Совместное применение законов сохранения. Упругие и неупругие столкновения

В параграфах 22 и 23 мы вывели закон сохранения импульса из законов Ньютона. В параграфе 31 мы показали, что закон сохранения энергии в рамках классической физики тоже можно вывести из законов Ньютона, если сделать дополнительное предположение о том, что все фундаментальные силы потенциальны. Законы Ньютона можно считать фундаментом классической механики, так как почти все остальные законы можно вывести из них. Сами же законы Ньютона являются обобщениями различных опытов и наблюдений.

Но можно поступить иначе: можно положить в основу механики законы сохранения импульса и энергии, а все остальные законы, включая законы Ньютона, вывести из них. Есть множество опытов и наблюдений, подтверждающих законы сохранения, поэтому есть все основания считать эти законы фундаментальными. Приведём без доказательства следующее утверждение:

Пара второго и третьего законов Ньютона эквивалентна паре законов сохранения импульса и энергии в инерциальных системах отсчёта в рамках классической механики.

Законы сохранения так же фундаментальны, как и законы Ньютона (а в 11 классе вы узнаете, что они даже более фундаментальны, так как они справедливы не только в классической физике). Вопрос о том, какими законами пользоваться при решении той или иной задачи, решается в каждом конкретном случае по-разному из соображений удобства. Законы сохранения часто используют для расчёта *столкновений* (атомов, молекул, бильярдных шаров и других тел), а также процессов, в которых важно только *начальное и конечное состояние системы* (например, требуется найти скорость санок в конце спуска с горки сложной формы).

В задачах о столкновениях часто говорят об абсолютно упругом или абсолютно неупругом ударе (столкновении).

Абсолютно упругое столкновение – это столкновение, происходящее без потерь энергии (без перехода механической энергии тел во внутреннюю). После абсолютно упругого столкновения тела полностью восстанавливают свою форму.

Абсолютно неупругое столкновение – это столкновение, после которого тела движутся как одно целое. При неупругом столкновении часть механической энергии переходит во внутреннюю.

Примерами неупругих столкновений являются столкновения пластилиновых шариков, которые при этом слипаются, или железнодорожных вагонов при сцепке.

Объединим в таблицу основные формулы по теме «Работа и энергия»:

Определение работы: $A = FS\cos\alpha$ (50)	*Потенциальная энергия упруго деформированного тела:* $E_p = \dfrac{kx^2}{2}$ (60)
Кинетическая энергия материальной точки: $E_k = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ (56)	*Теорема об изменении кинетической энергии:* $A_{\text{сил}}^{\text{всех}} = \Delta E_k$ (57)
Потенциальная энергия тела, поднятого над землёй: $E_p = mgh$ (59)	

Задачи

262. Учитель провёл пальцем по доске. Сила трения между пальцем и доской равна F, а путь, пройденный концом пальца, равен S. Чему равна работа силы, действующей на доску со стороны пальца? А на палец со стороны доски? Движение молекул не учитывать.

263. Человек тянул тележку в горизонтальном направлении с силой $F = 10$ Н и совершил при этом работу $A = 1600$ Дж. Какой путь проехала тележка?

264. Подъемный кран поднимает груз массой $m = 2000$ кг на высоту $h = 25$ м. Какую работу совершает сила, действующая на груз со стороны крана? Какую работу совершила сила тяжести?

265. Подъёмный кран перемещает груз массой $m = 1600$ кг в горизонтальном направлении. При этом груз проходит путь $s = 40$ м. Чему равна работа силы, действующей на груз со стороны крана? Силы тяжести?

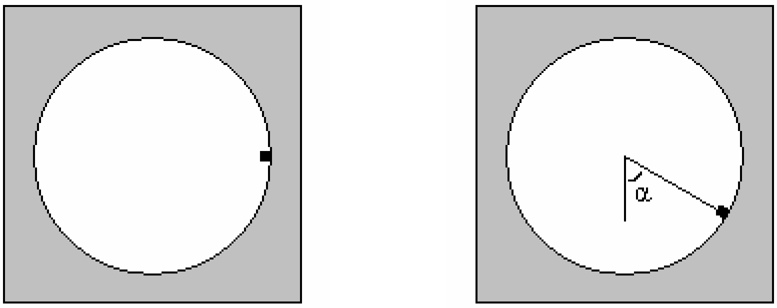
266. Настенные часы с кукушкой имеют две гири массой $m = 500$ г. Одну из гирь подняли на высоту $h = 1$ м над нижним положением. Какой потенциальной энергией обладает гиря? За нулевой уровень потенциальной энергии принять нижнее положение.

267. Астероид массой $m = 20$ т летит со скоростью $\upsilon = 30$ км/с. Какой кинетической энергией он обладает?

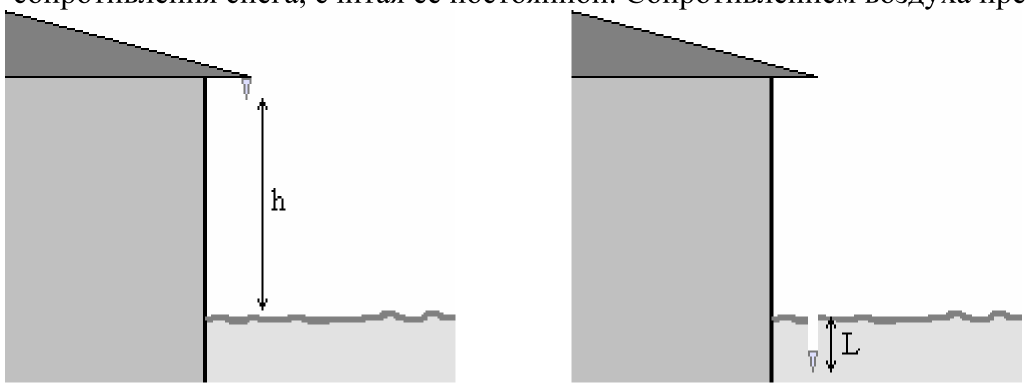
268. На какую высоту над землёй нужно поднять молот копра для забивания свай, чтобы его потенциальная энергия стала равна $E_p = 30$ кДж? Масса молота равна $m = 200$ кг. За нулевой уровень принять поверхность земли.

269. Камень подбросили вертикально вверх, сообщив ему скорость υ. На какую максимальную высоту над точкой бросания поднимется камень? Решите задачу в общем виде и сделайте расчёт для случая $\upsilon = 6$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

270. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Какую скорость имело тело на высоте h над землёй, если известно, что оно достигло этой высоты? Используйте закон сохранения энергии.
271. Литр керосина подняли на верхний этаж здания на высоту h над замлёй и сожгли. Куда делась потенциальная энергия керосина, поднятого над землёй?
272. Металлический шарик падает на пол с высоты $h = 2$ м и отскакивает от пола. Скорость шарика сразу после удара равна $\upsilon = 4$ м/с. Какая часть механической энергии шарика превратилась в тепловую энергию при ударе о пол?
273. На тело, движущееся равномерно по горизонтальной плоскости, действует сила, равная 100 Н и направленная под углом 30° к горизонту вверх. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен 0,1. Найти работы всех сил, действующих на тело, а также их суммарную работу при перемещении тела на 10 м.
274. К поверхности абсолютно гладкой цилиндрической полости радиуса R приставили маленький грузик, так, что он находится на уровне центра полости, и отпустили (рис. слева). Найдите скорость грузика при прохождении нижней точки траектории. Грузик не опрокидывается.

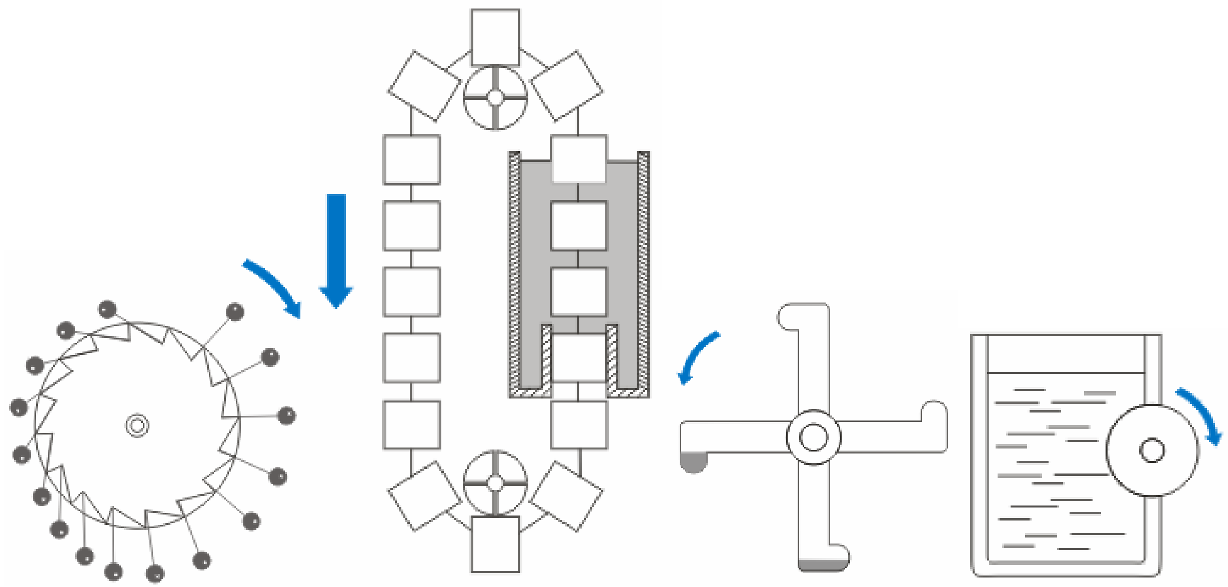


275. К поверхности абсолютно гладкой цилиндрической полости радиуса R приставили маленький грузик, так, что радиус, проведённый в его местоположение, образует с вертикалью угол α, и отпустили (рис. справа). Найдите скорость грузика при прохождении нижней точки траектории.
276. На краю крыши висела сосулька массой $m = 600$ г, её нижний конец находился на высоте $h = 6$ м над толстым слоем снега. Сосулька упала, и её нижний конец вошёл в снег на глубину $L = 1$ м. Найдите силу сопротивления снега, считая её постоянной. Сопротивлением воздуха пренебречь.



277. Земля может вращаться вокруг Солнца сколь угодно долго. Почему Земля не является вечным двигателем?
278. На рисунках а-г изображены проекты вечных двигателей, предложенные разными изобретателями. Рассмотрите каждый рисунок и найдите, в чём была ошибка автора каждого проекта (то есть объясните, почему эта конструкция не будет вечным двигателем).
а.) На рис. а колесо с откидными стержнями с грузами на концах должно было, по мысли автора, всё время вращаться по часовой стрелке. Грузы на откинутых стержнях справа находятся дальше от оси колеса, чем грузы слева, и поэтому момент силы тяжести будет вечно вращать колесо.
б.) На рис. б цепь с поплавками проходит через сосуд с водой. На поплавки в сосуде действует сила Архимеда, которая, по задумке автора, должна вечно вращать цепь в направлении, показанном стрелкой.
в.) Система на рис. в состоит из двух трубок, частично заполненных ртутью. По мысли автора, ртуть в трубках будет переливаться так, что система будет вечно вращаться против часовой стрелки.

г.) Система на рис. г очень проста. В стенку сосуда с водой встроен барабан, который может вращаться на оси. Сила Архимеда будет вечно вращать его по часовой стрелке.



а. б. в. г.

279. Мальчик подбросил мяч вертикально вверх и поймал его в точке бросания. Сравните время подъёма мяча до наивысшей точки и время падения (определите, какое время больше, а какое меньше). Учтите сопротивление воздуха.

280. Санки съезжают с ледяной горки. Опишите процесс преобразования энергии санок (какой энергией санки обладали в начале, в какую она превращалась за время спуска и в какую превратилась в конце).

281. Мальчик подбросил камень вертикально вверх, сообщив ему скорость $\upsilon = 8$ м/с. На какой высоте над точкой бросания кинетическая энергия камня равна его потенциальной энергии? За нулевой уровень потенциальной энергии принять уровень точки бросания. Сопротивлением воздуха пренебречь.

282. Гидроэлектростанция вырабатывает электроэнергию. Опишите путь, который проходит энергия, прежде чем стать электрической.

283. Кирпичная башня высотой $h = 50$ м имеет массу $m = 500$ т. Какая работа была совершена при её строительстве? Башня однородна по длине: любые два её участка одинаковой длины имеют одинаковую массу.

284. Какую работу нужно совершить, чтобы лежащий на земле однородный стержень длиной 2 м и массой 50 кг поставить вертикально?

285. От удара груза массой 50 кг, свободно упавшего с высоты 4 м, свая массой 150 кг входит в грунт на 10 см. Найдите силу сопротивления грунта, считая её постоянной. Удар абсолютно неупругий.

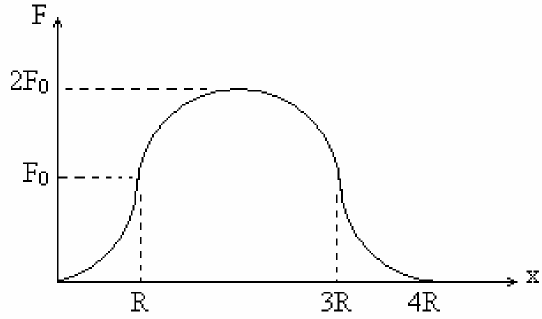
286. Бревно радиусом $R = 30$ см и длиной $L = 2$ м медленно ставят вертикально. Какая работа при этом совершается? Плотность древесины $\rho_д = 800$ кг/м^3.

287. На дне водоёма лежит цилиндрический бетонный столб радиусом R и длиной L. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы полностью извлечь столб из воды, если столб лежит на горизонтальном участке дна на глубине H? Плотность воды $\rho_в$, плотность бетона $\rho_б$ ($\rho_б > \rho_в$).

288. Железную трубу радиусом $R = 15$ см и длиной $L = 2$ м медленно ставят вертикально. Действие происходит под водой. Масса трубы равна $m = 70$ кг. Какая работа при этом совершается? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность железа $\rho_ж = 7800$ кг/м^3.

289. Пуля, летящая со скоростью $\upsilon_0 = 600$ м/с, пробивает деревянный экран. Скорость пули после пробивания экрана равна $\upsilon = 510$ м/с. Сколько таких экранов, поставленных один за другим, может пробить пуля?

290. Частица массой m, движущаяся со скоростью υ_0, влетает в силовое поле, такое, что действующая на неё сила сонаправлена скорости, а график зависимости её модуля от координаты приведён на рисунке (ось x направлена в сторону движения частицы). График состоит из дуг окружностей радиуса R. Найдите скорость частицы на выходе из поля, если известно значение F_0 (см. рис).

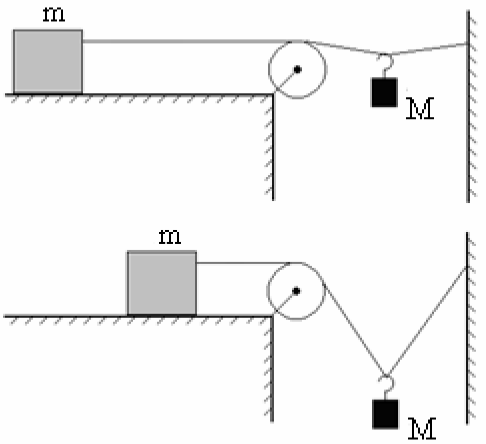


291. Жесткость пружины игрушечного пистолета равна 800 Н/м. Перед выстрелом пружину сжимают на 5 см. Какую скорость приобретает пуля массой 20 г при выстреле в горизонтальном направлении?

292. Во сколько раз изменится скорость пули пружинного пистолета при выстреле в горизонтальном направлении, если жёсткость пружины увеличить в N раз, величину сжатия увеличить в K раз, а массу пули увеличить в L раз?

293. На невесомую вертикальную пружину жёсткостью k падает с высоты h шарик массой m. Чему равно максимальное сжатие пружины?

294. Для измерения коэффициента трения была использована установка, показанная на рисунке. К нити подвесили груз массой M. Груз опустился на высоту h и остановился. Брусок массой m, лежащий на подставке, прошёл в это время путь S. Выведите формулу для расчёта коэффициента трения между бруском и подставкой по этим данным.



295. Импульс материальной точки равен p = 8 кг·м/с, а её кинетическая энергия равна $E_к$ = 16 Дж. Найдите массу и скорость материальной точки.

296. Бильярдный шар, двигавшийся со скоростью υ = 8 м/с, столкнулся с неподвижным шаром. Найдите скорости шаров после столкновения, если удар центральный и абсолютно упругий. Массы шаров одинаковы.

297. На абсолютно гладком столе лежит брусок массой M. В него врезается другой брусок массой m, двигавшийся со скоростью V. Удар центральный и абсолютно упругий. Найдите скорости брусков после столкновения.

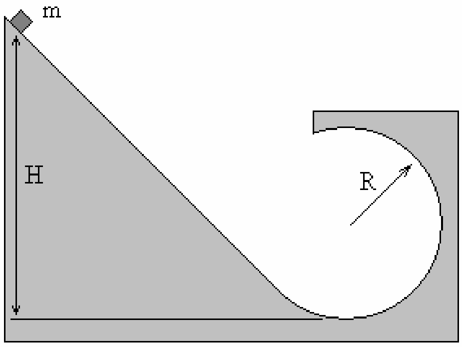
298. На столе лежит брусок массой M. Коэффициент трения между бруском и столом равен μ. В него врезается двигавшаяся по столу абсолютно гладкая пружина массой m и жёсткостью k. Чему должна быть равна минимальная начальная скорость пружины, чтобы брусок сдвинулся с места? Скорость направлена вдоль оси пружины.

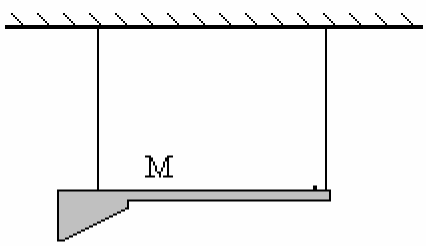
299. Объясните, почему при абсолютно упругом отскакивании (отражении) мяча от стены угол падения равен углу отражения.

300. Докажите, что при абсолютно упругом центральном столкновении поступательно движущихся тел скорость движения тел относительно друг друга до и после столкновения одинакова по модулю.

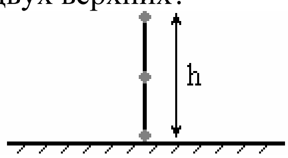
301. Кусок пластилина массой m_1 налетает на неподвижный кусок пластилина массой m_2, имея до столкновения скорость υ_1, и слипается с ним. Найдите кинетическую энергию кусков после удара.

302. Два куска пластилина массами m_1 и m_2, движущиеся в перпендикулярных направлениях со скоростями υ_1 и υ_2, сталкиваются и слипаются в один кусок. Какое количество теплоты выделяется при столкновении?
303. Атом массой m_1, движущийся со скоростью υ, налетает на покоящийся атом массой m_2, и происходит абсолютно упругое столкновение. После столкновения вектор скорости первого атома оказался направленным под углом θ к направлению начальной скорости (θ – тета, греческая буква; говорят, что атом *рассеялся на угол* θ). Найти скорости атомов после столкновения.
304. Докажите, что при абсолютно упругом, но не центральном столкновении двух бильярдных шаров, один из которых до столкновения покоился, шары разлетаются под углом 90°.
305. На шар радиуса R, покоящийся в невесомости, налетает другой шар такого же радиуса и такой же массы, движущийся со скоростью V. Известно, что расстояние между центром первого шара и прямой траекторией второго шара (прицельный параметр) равно L. Найдите скорости шаров после их абсолютно упругого столкновения.
306. Груз массой m = 100 кг висит на верёвке длиной l = 5 м. Максимальная сила натяжения, которую выдерживает верёвка, равна T_{max} = 1960 Н. Верёвку отводят от вертикали, поднимая груз на некоторую высоту, и отпускают. На какую максимальную высоту можно поднять груз, чтобы верёвка при его дальнейшем движении не оборвалась?
307. С горки высотой H спускается грузик массой m и движется далее по закруглению радиуса R (рис. слева). Горка и закругление абсолютно гладкие. С какой силой грузик давит на закругление в верхней точке траектории, если известно, что он достиг этой точки?



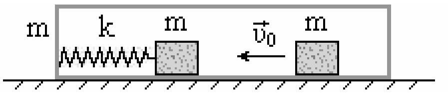


308. Ружьё массой M = 3 кг, подвешенное к потолку на двух нитях, выстреливает пулю массой m = 10 г и в результате поднимается на высоту h = 19,6 см над начальным положением. Найдите скорость пули относительно земли.
309. На гладком столе стоит гантелька, состоящая из невесомого стержня и трех одинаковых маленьких шариков (см. рис). Её высота равна h. Гантелька падает. Найдите скорость среднего шарика в момент удара о стол. Трения между нижним шариком и столом нет. Изменится ли ответ, если масса нижнего шарика отличается от масс двух верхних?



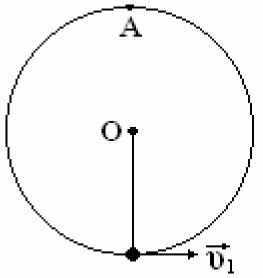
310. К концу вертикально подвешенной пружины жёсткостью k = 40 Н/м подвесили груз массой m = 0,1 кг и отпустили. Найдите максимальную скорость груза при его дальнейшем движении и максимальное смещение от начального положения.
311. В невесомости движутся два шара массами m_1 и m_2 со скоростью V по прямой, проходящей через их центры. Шары связаны нитью, и между шарами зажата пружина жёсткостью k. Нить пережигают, и в результате шар массой m_1 останавливается. На какую величину была сжата пружина?
312. На двух одинаковых нитках длины L подвешены к одной точке два пластилиновых шарика массами m_1 и m_2. Шарик массой m_1 отвели на угол α от вертикали и отпустили. На какую высоту над начальным уровнем поднимутся слипшиеся шарики после соударения?
313. На гладком столе стоит коробка массой m. В коробке находятся два бруска, масса каждого из которых тоже равна m. Трения в системе нет. Одному бруску сообщили скорость υ_0. Другой соединён с коробкой пружиной жёсткостью k. При столкновении бруски слипаются и движутся дальше

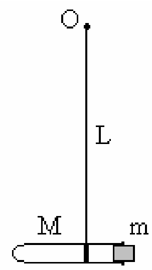
как одно целое. Найдите максимальную скорость коробки при дальнейшем движении и максимальное сжатие пружины.



314. Ствол пушки образует угол α с горизонтом. В первом опыте пушку прикрепили к земле и выстрелили. Ядро вылетело из неё со скоростью υ_0. Масса пушки M, масса ядра m. Во втором опыте пушку не прикрепили к земле, и при выстреле она откатилась назад, двигаясь поступательно. Найти скорость пушки сразу после выстрела. Считайте, что механическая энергия, приобретённая системой в результате взрыва, в первом и втором опытах одинакова.

315. Маленький металлический шарик, подвешенный на нити длиной L, может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси O (рис. слева). Какую минимальную скорость нужно сообщить шарику в нижней точке траектории, чтобы он при движении смог достичь верхней точки траектории (точки A)?

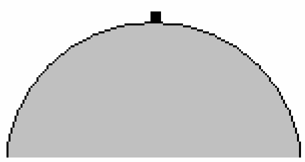


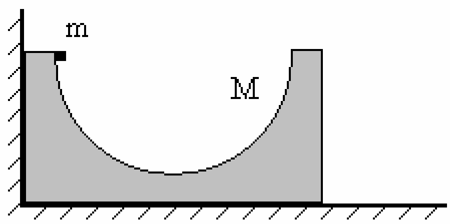


316. Маленький металлический шарик, подвешенный на нити, может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси O. Экспериментатор обнаружил, что наименьшая скорость, которую нужно сообщить шарику, чтобы он достиг верхней точки траектории (точки A), равна υ_1. Затем экспериментатор заменил нить лёгким стержнем той же длины, который может без трения вращаться вокруг оси O. Какую минимальную скорость нужно сообщить шарику теперь, чтобы он достиг точки A?

317. Пробирка массой M, подвешенная на нити длиной L, может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси O (рис. сверху справа). Пробирка закрыта пробкой массой m. Воздух в пробирке нагревают, и пробку вышибает. С какой минимальной скоростью относительно пробирки должна вылететь пробка, чтобы пробирка при движении достигла наивысшей точки окружности?

318. На абсолютно гладкой сферической поверхности радиуса R лежит маленький грузик (рис. слева). В результате очень малого воздействия грузик начал соскальзывать и в некоторый момент оторвался от поверхности. Найдите скорость грузика в момент отрыва.



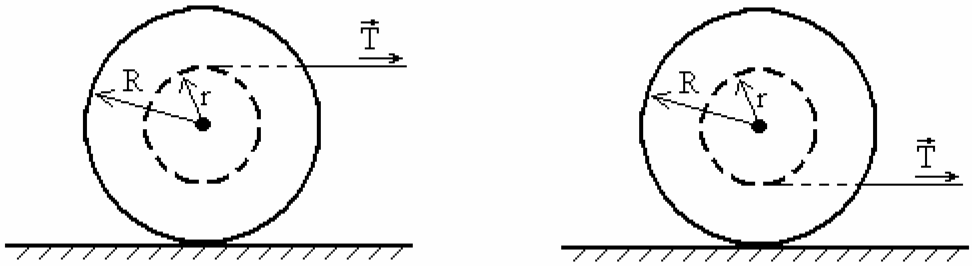


319. На абсолютно гладком полу около стены стоит брусок массой M, в котором имеется полукруглый вырез радиуса R (рис. справа). Поверхность внутри выреза тоже абсолютно гладкая. На поверхность кладут груз массой m, так, как показано на рисунке, и система приходит в движение. Найдите максимальную скорость бруска при его движении.

320. С наклонных плоскостей одинаковой длины и высоты съезжают брусок и шар. Брусок движется без трения, а шар – без проскальзывания. Сравните скорости их центров масс в конце спуска (определите, какая из них больше).

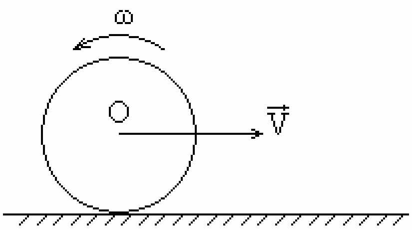
321. На наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, поставили обруч, и он катится без проскальзывания. Найдите ускорение его центра масс.

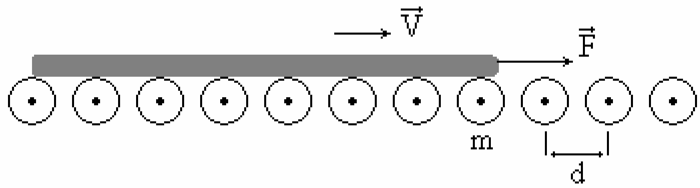
322. На горизонтальном столе лежит катушка из лёгкого материала. В её центр вставлен тонкий, но тяжёлый стержень массой m. Можно считать, что вся масса катушки сосредоточена в центре и равна m. Внешний радиус катушки равен R, а внутренний – r. Катушку тянут за нитку с силой T, и она катится по столу без проскальзывания. Найдите ускорение центра катушки (модуль и направление) в двух случаях, показанных на рисунках.



323. Колесо массой M и радиуса R, раскрученное на неподвижной оси до угловой скорости ω, прижали к плоской поверхности. Сила прижатия равна N, а коэффициент трения о поверхность равен μ. Найдите угол поворота колеса при движении до полной остановки, а также время этого движения. Вся масса колеса сосредоточена в его ободе.

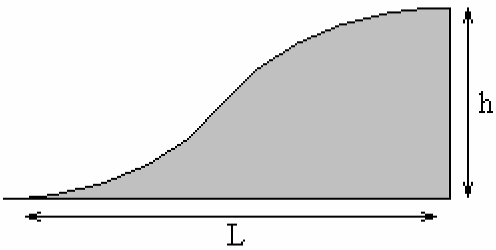
324. Металлический обруч радиуса R раскрутили до угловой скорости ω в направлении, показанном на рисунке, поднесли к горизонтальной плоскости и отпустили, сообщив его центру масс скорость V (см. рис. слева). Спустя время t, обруч вернулся в точку старта, двигаясь без проскальзывания. Найдите коэффициент трения между обручем и плоскостью. Найдите работу силы трения, действовавшей на обруч, если масса обруча равна m.

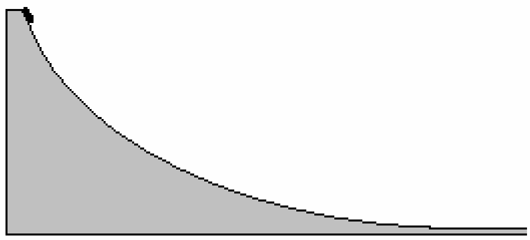




325. Резиновый коврик протаскивают по цепочке из валиков с почти постоянной скоростью V (рис. справа). Каждый валик в начале неподвижен, но может вращаться вокруг своей оси без трения. Масса каждого валика равна m и полностью сосредоточена в его ободе. Расстояние между осями соседних валиков равно d (оно много меньше длины коврика). По этим данным вычислите горизонтальную силу, действующую на коврик.

326. Сани массой m равномерно и медленно поднимают в горку сложной формы (см. рис. слева), действуя на них силой, которая всегда направлена вдоль касательной к горке. Длина горки равна L, высота горки равна h, а коэффициент трения между санями и горкой равен μ. Найдите работу, совершаемую при таком подъёме.



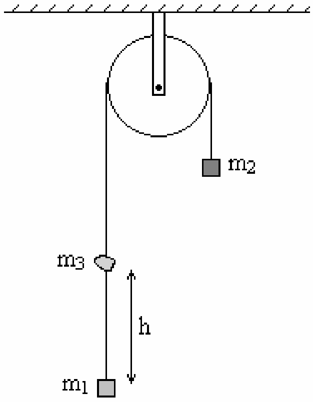


327. Мальчик съезжает на санках с ледяной горки, показанной на рис. справа. Известно, что коэффициент трения между санками и льдом равен 0,4. Перерисуйте рисунок (приближённо) и найдите с помощью построения точку, в которой санки остановятся. Центростремительным ускорением при движении санок пренебречь.

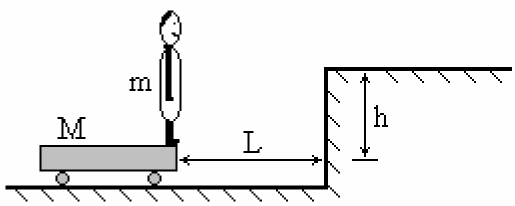
328. Рабочий массой m = 60 кг красит стену дома, стоя на платформе массой M = 120 кг, подвешенной на тросах на высоте h = 3 м над землёй. Внезапно тросы обрываются, и платформа с рабочим падает. Школьник Вовочка, видевший это со стороны, думает, что рабочий смог бы легко избежать травм, если бы в нужный момент подпрыгнул на платформе. Найдите минимально возможную скорость рабочего в момент приземления, если работа, которую он может совершить при прыжке, равна A = 400 Дж. Оцените, насколько прав Вовочка. Платформа и рабочий движутся поступательно.

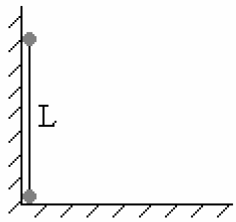
329. Есть два одинаковых шара. Один лежит на горизонтальном столе, а другой висит на нити. Шарам передали одинаковое количество теплоты. Какой шар нагреется на чуть большую температуру, чем другой?

330. На нити, перекинутой через блок, висят грузы массами m_1 и m_2. Один из грузов вначале держат рукой, и система неподвижна. Над левым грузом на высоте h над ним держат кусок пластилина массой m_3. Имеют место неравенства $m_1 < m_2$ и $m_1 + m_3 > m_2$. Груз отпускают и оба груза приходят в движение. Когда левый груз долетает до пластилина, пластилин отпускают. На какую максимальную высоту над начальным положением поднимется пластилин? Трением в блоке и его массой пренебречь, нить считать невесомой и нерастяжимой.



331. На краю неподвижной тележки массой M стоит человек массой m. Какую минимальную работу должен совершить человек, чтобы запрыгнуть (встать ногами) на возвышение высотой h, находящееся на расстоянии L от тележки (см. рис)? Трением и массой колёс тележки пренебречь; тележка не опрокидывается.

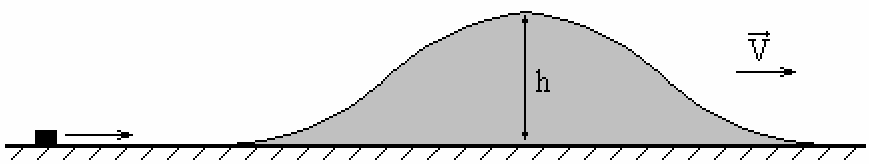




332. К стене приставлена гантелька, состоящая их двух одинаковых маленьких и абсолютно гладких шариков и невесомого стержня длины L. В результате очень малого воздействия гантелька пришла в движение (нижний шарик скользит по полу). Найдите скорость верхнего шарика момент отрыва от стены.

333. Представим, что с пологой горки высотой h спускаются без трения санки и потом движутся по гладкой горизонтальной плоскости. Недалеко по дороге едет машина, скорость которой относительно Земли постоянна и равна (в момент спуска санок по модулю и направлению) конечной скорости санок. В системе отсчёта, связанной с машиной, теорема об изменении кинетической энергии для санок не выполняется: работа силы тяжести положительна, а изменение кинетической энергии отрицательно. Закон сохранения механической энергии для системы “санки-Земля” тоже не выполняется: когда санки наверху, они обладают кинетической энергией; когда они съехали вниз, их кинетическая энергия исчезла, а потенциальная энергия системы уменьшилась. Верны ли эти утверждения, и если нет, то в чём ошибка?

334. По абсолютно гладкой горизонтальной поверхности движется плавная горка высотой h со скоростью V (см. рис). Горку догоняет маленькая шайба. Какую минимальную скорость должна иметь шайба, чтобы переехать через горку? Горка тоже абсолютно гладкая, причём её масса много больше массы шайбы.



§ 33. Мощность

На совершение одной и той же работы различным устройствам требуется разное время. Подъёмный кран может за несколько минут поднять на верхний этаж здания сотни кирпичей. Человеку для выполнения такой работы потребовалось бы несколько часов. Скорость выполнения работы характеризуется величиной, называемой мощностью.

Мощность – величина, равная отношению работы ко времени, за которое она совершена:

$$N = \frac{A}{t} \qquad (62)$$

В предыдущем параграфе мы выяснили, что всякая сила, совершая работу, «перекачивает» энергию от одного тела к другому или преобразует энергию из одного вида в другой. При этом полное количество энергии не увеличивается и не уменьшается. Например, сила тяжести при свободном падении тела переводит потенциальную энергию системы «тело-Земля» в кинетическую энергию тела. Поэтому можно дать более общее определение мощности:

Мощность – это скорость преобразования энергии из одного вида в другой.

Мощность – величина постоянная, если за любые два равных промежутка времени совершается одинаковая работа. Только в этом случае мощность можно найти по формуле (62). В других случаях формула (62) определяет *среднюю мощность*. В кинематике вводится средняя скорость и мгновенная скорость. Аналогично можно ввести среднюю и мгновенную мощность.

Выведем формулу для расчёта мгновенной мощности. По аналогии с мгновенной скоростью, мгновенная мощность – это число, к которому стремится дробь $N = \frac{\Delta A}{\Delta t}$ при стремлении Δt к нулю. Распишем, чему равно приращение работы ΔA: $\Delta A = F \cdot \Delta S \cdot \cos\alpha$. Подставив это в предыдущую формулу, получим: $N = F\frac{\Delta S}{\Delta t}\cos\alpha$. Но дробь $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ при стремлении Δt к нулю стремится к мгновенной скорости. Поэтому для мгновенной мощности получаем формулу:

$$N = F\upsilon\cos\alpha \qquad (63)$$

Как видим, мгновенная мощность определяется силой и скоростью, с которой движется точка приложения силы.

За единицу мощности принимают такую мощность, при которой за 1 с совершается работа в 1 Дж. Эту единицу называют ваттом (Вт) в честь английского учёного Уатта (1736-1819).

$$1Вт = 1\frac{Дж}{с}.$$

§ 34. Коэффициент полезного действия

Подъёмный кран, поднимая груз массой m на высоту h, совершает **полезную** работу $A = mgh$. Но электрическая энергия, затрачиваемая при этом, всегда несколько больше полезной работы. Дело в том, что электрическая энергия тратится также на преодоление сил трения и на поднятие подвижных частей крана. Количество затраченной энергии равно не полезной, а **полной** работе, совершённой краном.

На практике полная работа, совершённая механизмом, всегда несколько больше полезной. Часть энергии всегда теряется (например, на преодоление сил трения). В конечном итоге эта часть энергии «рассеивается», переходя в энергию хаотического движения и взаимодействия молекул.

Обозначив полезную работу как $A_п$, а полную (затраченную) как $A_з$, можно записать:

$$A_п < A_з, \text{ или } \frac{A_п}{A_з} < 1.$$

Отношение полезной работы к полной работе называется коэффициентом полезного действия (КПД) механизма.

КПД обычно обозначают греческой буквой η (читается «эта») и выражают в частях или в процентах:

$$\eta = \frac{A_п}{A_з} \text{ или } \eta = \frac{A_п}{A_з} \cdot 100\% \qquad (64)$$

Конструируя любые устройства, всегда стремятся увеличить их КПД. Для этого стараются уменьшить трение.

Задачи

335. Подъемный кран поднимает груз массой $m = 1600$ кг на высоту $h = 30$ м за время $t = 30$ с. Чему равна средняя мощность крана за время подъёма?

336. Мощность насоса, качающего воду, равна $N = 500$ кВт. Какую работу совершит этот насос за время $t = 20$ мин?

337. Человек массой $m = 60$ кг идёт по горизонтальному пути со скоростью $\upsilon = 6$ км/ч. Вычислите, какую мощность он при этом развивает. Подсчитано, что человек, равномерно идя по горизонтальному пути, совершает примерно 0,05 той работы, которая требовалась бы для поднятия этого человека на высоту, равную длине пути.

338. Транспортёр за время $t = 1$ ч поднимает $V = 30$ м^3 песка на высоту $h = 12$ м. Вычислите полезную мощность транспортёра. Насыпная плотность песка равна $\rho = 1500$ кг/м^3.

339. Автомобиль едет со скоростью $\upsilon = 70$ км/ч. Сила тяги его двигателя при этом равна $F = 700$ Н. Какую полезную мощность развивает двигатель?

340. Автомобиль массой $M = 800$ кг трогается с места и, двигаясь равноускоренно, проходит $S = 20$ м за $t = 2$ с. Какую максимальную мощность развивает двигатель при таком движении? Чему равна средняя мощность автомобиля на этом отрезке пути?

341. Башенный кран движется относительно земли со скоростью $\upsilon_1 = 4$ м/с и поднимает груз массой $m = 500$ кг. Скорость груза относительно крана равна $\upsilon_2 = 3$ м/с. Чему равна полезная мощность крана?

342. Резец электрорубанка действует на строгаемую древесину с силой $F = 600$ Н. Полезная мощность, развиваемая рубанком, равна $N = 120$ Вт. За какое минимальное время этим рубанком можно прострогать доску длиной $L = 4$ м?

343. Насос качает воду из колодца глубиной $h = 8$ м со скоростью $Q = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = 1$ килограмм в секунду. Чему равна полезная мощность насоса? Кинетическую энергию воды и вязкое трение в трубе не учитывать.

344. Насос качает воду из колодца глубиной $h = 7$ м. При этом из шланга с внутренним радиусом $r = 1$ см течёт струя воды со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Чему равна полезная мощность насоса? Вязким трением в шланге пренебречь.

345. Электродвигатель потребляет из электросети мощность $N = 480$ Вт. За $t = 30$ мин двигатель совершил полезную работу $A_п = 840$ кДж. Чему равен КПД этого двигателя?

346. Лампочка потребляет из сети мощность $N = 100$ Вт. КПД лампочки равен $\eta = 12\%$. Сколько энергии в виде света выделяет лампочка за $t = 1$ ч?

347. Подъемный кран поднимает груз массой $m = 2000$ кг на высоту $h = 25$ м. При этом он затрачивает $E = 580$ кДж электроэнергии. Чему равен КПД этого крана?

348. Высота падения воды на Нурекской ГЭС (гидроэлектростанции) равна $h = 275$ м. Поток воды через одну турбину ГЭС равен $D = 155$ кубометров в секунду. Чему равен КПД турбины, если даваемая ей электрическая мощность равна $N = 300$ МВт?

349. Электродвигатель потребляет из сети мощность $N = 500$ Вт, а его КПД равен $\eta = 90\%$. Какое количество теплоты выделяется за $t = 20$ мин работы двигателя?

350. КПД мотора лифта равен $\eta = 90\%$. С какой скоростью лифт поднимет кабину с пассажирами массой $m = 600$ кг, если он потребляет из электросети мощность $N = 16$ кВт?

351. Два автомобиля с максимальными мощностями двигателей N_1 и N_2 могут развивать максимальные скорости υ_1 и υ_2 соответственно. Какую максимальную скорость смогут развить при тех же условиях эти два автомобиля, связанные буксирным тросом? Считать, что скорость автомобиля ограничена сопротивлением воздуха (аэродинамический предел). Сила сопротивления воздуха, действующая на каждый автомобиль, пропорциональна квадрату скорости.

352. Два автомобиля с максимальными мощностями двигателей N_1 и N_2 могут развивать максимальные скорости υ_1 и υ_2 соответственно. Какую максимальную скорость смогут развить при тех же условиях эти два автомобиля, связанные буксирным тросом, если максимальная скорость ограничена прочностью деталей двигателя, а сопротивление воздуха можно не учитывать?

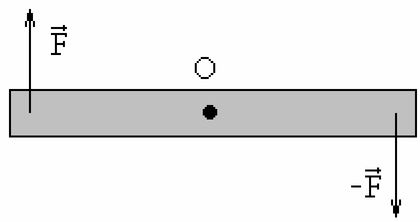
Статика – раздел механики, в котором изучается равновесие тел.

§ 35. Равновесие тел. Первое условие равновесия твёрдого тела

В предыдущих главах мы изучали движение тел. Теперь мы рассмотрим условия, при которых тела покоятся (или, как говорят, находятся в равновесии). На первый взгляд может показаться, что здесь всё просто. Статика является частным случаем динамики, так как покой тел – это частный случай движения (движение с нулевой скоростью и нулевым ускорением). Согласно второму закону Ньютона, если ускорение равно нулю, то равна нулю и векторная сумма всех сил, действующих на тело. Значит, условием равновесия тела можно считать равенство нулю суммы сил, действующих на тело.

Но на самом деле всё несколько сложнее. Дело в том, что в главе «динамика» мы рассматривали либо движение материальной точки, либо поступательное движение тела. А ещё существует, например, вращательное движение тел. Динамика вращательного движения в общем случае не изучается в школьной программе. Но в статике мы будем учитывать возможность такого движения, и нам надо будет вывести условие, при котором такое движение не возникает.

Этим условием не является равенство нулю суммы действующих на тело сил. Рассмотрим пример, из которого это видно. Пусть имеется доска, насаженная на ось, вокруг которой она может вращаться. В начальном состоянии сила тяжести уравновешена силой реакции опоры со стороны оси. Приложим к краям доски две равные по модулю и противоположные по направлению силы $\vec{F}$ и $-\vec{F}$. Сумма этих сил равна нулю: $\vec{F}+(-\vec{F})=0$. Но, несмотря на это, доска придёт в движение: она начнёт поворачиваться.



Как же тогда сформулировать условие, при котором тело находится в покое? Вспомним, что любое тело можно разбить на много сколь угодно малых элементов, каждый из которых можно со сколь угодно большой точностью считать материальной точкой. Для материальной точки не существует вращения, поскольку она, по определению, не имеет размеров. Поэтому, согласно второму закону Ньютона, условием равновесия материальной точки является равенство нулю суммы действующих на неё сил. Поэтому условие равновесия тела можно сформулировать так:

Для равновесия тела необходимо и достаточно, чтобы сумма всех сил, действующих на любой сколь угодно малый элемент этого тела, была равна нулю. При этом предполагается, что начальные скорости всех точек тела тоже равны нулю.

Однако это неудобное условие. Как проверить его выполнение при расчётах? Не проще ли заменить его какими-нибудь другими условиями? Оказывается, это возможно. Но сначала уточним, для каких тел мы будем формулировать эти условия. Все реальные тела под действием приложенных к ним сил деформируются (меняют свою форму и размеры). Если действие сил вызывает большие деформации, то после приложения сил мы будем иметь дело с новым телом, у которого уже новая форма и размеры; при этом в теле могут возникнуть колебания и другие сложные эффекты. Такие задачи, связанные с расчётом деформаций, обычно весьма сложны. Поэтому мы в этой главе будем рассматривать случаи, когда деформации малы и ими можно пренебречь. Мы сформулируем условия равновесия для абсолютно твёрдого тела.

Абсолютно твёрдое тело – это тело, конфигурация которого не меняется при любых воздействиях.

Эквивалентное определение:

Абсолютно твёрдое тело – это тело, расстояние между любыми двумя точками которого сохраняется неизменным.

Многие реальные тела можно приближённо считать абсолютно твёрдыми. Для краткости абсолютно твёрдое тело будем называть просто твёрдым телом.

Всякое движение абсолютно твёрдого тела можно представить в виде суммы поступательного и вращательного движений (например, движения центра масс и вращения вокруг какой-то оси, проходящей через него). Мы сформулируем два условия, одно из которых перекрывает возможность поступательного движения, а второе – вращательного. Первое условие следует прямо из второго закона Ньютона. Тело не приходит в поступательное движение, если сумма всех действующих на него сил равна нулю. Все силы делятся на внешние и внутренние. По третьему закону Ньютона, сумма всех внутренних сил равна нулю, так как любой внутренней силе соответствует сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению. С этим мы уже встречались при выводе закона сохранения импульса. Остаются только внешние силы, и *первое условие равновесия твёрдого тела* формулируется так:

Если твёрдое тело находится в равновесии, то векторная сумма всех внешних сил, приложенных к нему, равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = 0 \qquad (65)$$

На примере опыта с доской мы убедились, что это условие является *необходимым, но не достаточным* для равновесия. Второе условие равновесия твёрдого тела – это известное вам из 7 класса правило моментов, которое является обобщением правила рычага.

§ 36. Момент силы. Второе условие равновесия твёрдого тела

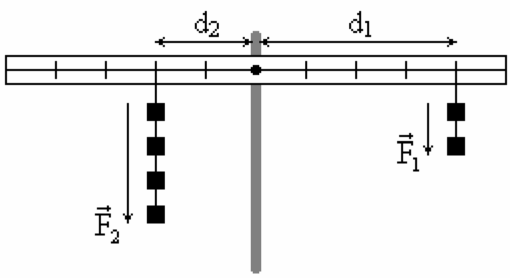
Введём основные понятия, связанные со вторым условием равновесия твёрдых тел. Будем рассматривать вращение твёрдого тела относительно некоторой оси.

Плечом силы называется длина перпендикуляра, опущенного из оси вращения на линию действия силы.

Плечо силы обычно обозначают буквами d или *l*.

Правило рычага, известное из 7 класса, можно записать в виде (см. рис)

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \qquad (66)$$



В левой части равенства стоят величины, относящиеся к одной силе, а в правой – к другой силе. Удобно ввести ещё одну физическую величину – *момент силы* (обозначается буквой M).

Моментом силы относительно оси называется произведение модуля силы на её плечо, взятое со знаком «плюс» или «минус»:

$$M = \pm Fd \qquad (67)$$

Момент силы измеряется в ньютон-метрах (Н·м).

Будем считать момент силы $\vec{F}$ *положительным*, если эта сила стремится повернуть тело против часовой стрелки (относительно чертежа), и *отрицательным*, если по часовой стрелке. *Второе условие равновесия твёрдого тела* формулируется так:

Если твёрдое тело находится в равновесии, то сумма моментов всех внешних сил, действующих на него, относительно любой оси, равна нулю:

$$M_1 + M_2 + M_3 + ... = 0 \qquad (68)$$

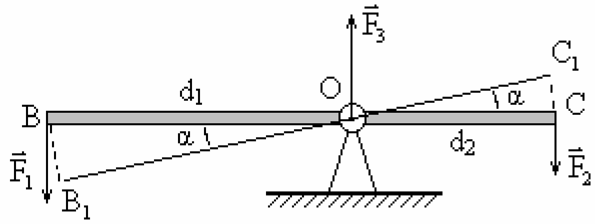
В случае, когда у тела имеется *закреплённая ось вращения* (как на рис. сверху), второе условие равновесия более простое: ***Если твёрдое тело с закреплённой осью вращения находится в равновесии, то сумма моментов всех внешних сил, действующих на него, относительно этой оси, равна нулю.***

Одновременное выполнение равенств (65) и (68) является *необходимым и достаточным условием равновесия твёрдого тела*, поскольку оно перекрывает возможность и поступательного, и вращательного движения тела.

Отметим, что в 7 классе мы вводили определение момента и формулировали правило моментов немного иначе: момент был всегда положительным, и сумма моментов сил, вращающих тело по часовой стрелке, была равна сумме моментов сил, вращающих тело против часовой стрелки. В определении, которое мы дали сейчас, нет принципиального отличия от определения, данного в 7 классе, но оно более удобно в математическом отношении.

Второе условие равновесия тел (или правило моментов) было сначала установлено на опытах. Но его можно также вывести из закона сохранения энергии или теоремы об изменении кинетической энергии. Кратко можно сказать так: из закона сохранения энергии следует золотое правило механики, а правило моментов является частным случаем золотого правила механики. Ниже мы проведём вывод более подробно, опираясь на теорему об изменении кинетической энергии.

Для простоты рассмотрим случай, когда у тела имеется закреплённая ось вращения О. Потом обсудим, как обобщить наш вывод на случай, если такой оси нет. Пусть к телу приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, а силы тяжести нет (дело происходит в невесомости). На тело действует также сила реакции опоры $\vec{F}_3$ со стороны оси. Такое тело не может двигаться поступательно, поэтому автоматически выполняется первое условие равновесия: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$.



Докажем второе условие равновесия. При приложении сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ тело может либо остаться в покое, либо начать поворачиваться. Найдём работу сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ при повороте тела на очень малый угол α. Точки приложения сил при повороте на этот угол пройдут пути $S_1 \approx BB_1$ и $S_2 \approx CC_1$ (если угол α очень мал, то дуги BB_1 и CC_1 можно считать прямолинейными). Если угол α выражен в радианах, то $BB_1 = \alpha d_1$ и $BB_2 = \alpha d_2$. Значит, $S_1 = \alpha d_1$ и $S_2 = \alpha d_2$ (эти равенства могут выполняться со сколь угодно большой точностью, т.к. угол α можно выбрать сколь угодно малым).
Работы сил равны $A_1 = F_1S_1 = F_1\alpha d_1$ и $A_2 = –F_2S_2 = –F_2\alpha d_2$.
Но $F_1d_1 = M_1$; $–F_2d_2 = M_2$ – моменты сил. Поэтому $A_1 = \alpha M_1$, $A_2 = \alpha M_2$. Сила $\vec{F}_3$ не совершает работы, т.к. точка её приложения не перемещается. Поэтому полная работа всех сил равна

$$A = A_1 + A_2 = (M_1 + M_2)\alpha \qquad (69)$$

Но работа всех сил равна изменению кинетической энергии. Если тело приходит в движение, значит, его кинетическая энергия увеличивается. Из формулы (69) следует, что кинетическая энергия может увеличиваться тогда и только тогда, когда сумма моментов $M_1 + M_2$ не равна нулю. Поэтому равенство нулю суммы моментов – необходимое и достаточное условие отсутствия вращения, что и требовалось доказать.

В более общем случае, когда у тела нет закреплённой оси вращения, таким условием является равенство нулю суммы моментов относительно любой оси (то есть всех осей). Действительно, любое движение твёрдого можно представить как сумму поступательного движения и вращения. Если выполнено первое условие равновесия, то возможность поступательного движения перекрыта, и мы можем, повторяя проведённые выше рассуждения для любой оси в пространстве, доказать, что она может являться осью вращения тогда и только тогда, когда сумма моментов $M_1 + M_2$ не равна нулю. Таким образом, сумма моментов всех сил «контролирует» (допускает или не допускает) возникновение вращений. Все эти рассуждения остаются справедливыми в случаях, если к телу приложено более двух (и вообще, сколько угодно) сил.

При решении задач иногда приходится применять оба условия равновесия твёрдых тел одновременно.

Отметим ещё несколько важных особенностей движения твёрдых тел. Движение твёрдого тела в каждый момент времени можно представить в виде суммы движения центра масс и вращения вокруг какой-то оси, проходящей через него. Движение центра масс определяется суммой всех внешних сил, а вращение определяется суммой моментов этих сил (сумма моментов внутренних сил в твёрдом теле равна нулю). Поэтому ***в твёрдом теле точку приложения любой силы можно переносить по линии действия этой силы, и в движении тела ничего не изменится.*** Более того, ***несколько сил, действующих на твёрдое тело, можно заменить одной равнодействующей силой, равной их сумме (если сумма не равна нулю), и такой, чтобы её момент относительно центра масс был равен сумме их моментов.***

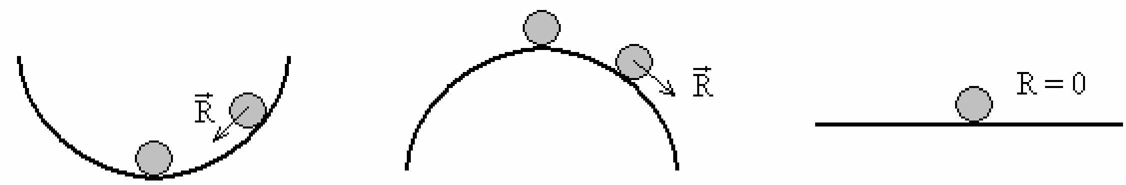
§ 37. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесие

Иногда выделяют три вида равновесия тела: устойчивое, неустойчивое и безразличное. Эта классификация очень проста.

Равновесие тела устойчиво, если при выведении из равновесия равнодействующая всех приложенных к нему сил возвращает тело к положению равновесия, неустойчиво, если удаляет от положения равновесия, и безразлично, если равнодействующая равна нулю.

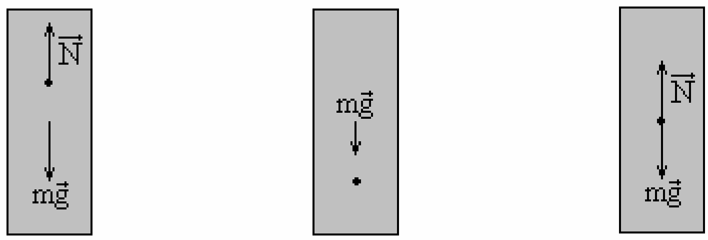
Проиллюстрируем это на примерах.

1. Равновесие тела, имеющего точку опоры.



На рисунке слева при выведении тела из положения равновесия равнодействующая сил стремится вернуть его в это положение. На среднем рисунке равнодействующая сил уводит тело от положения равновесия. На рисунке справа равнодействующая всегда равна нулю.

2. Равновесие тела с закреплённой осью вращения.

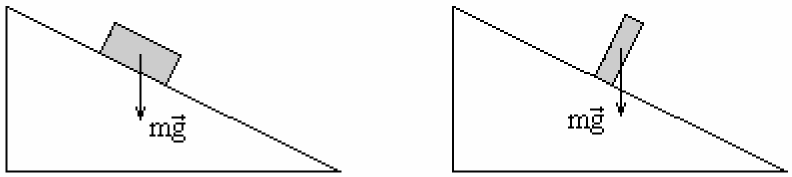


На рисунке слева при выведении тела из положения равновесия сила тяжести стремится вернуть его в это положение. На среднем рисунке сила тяжести при выведении тела из положения равновесия будет уводить его от этого положения (тело опрокинется). На рисунке справа равнодействующая силы тяжести и силы реакции опоры всегда равна нулю.

Атомы и молекулы в твёрдых телах находятся в состоянии устойчивого равновесия. Они колеблются около положения равновесия (колеблются *в узлах кристаллической решётки*). Благодаря этому твёрдые тела не рассыпаются на части сами по себе.

Отметим ещё условие равновесия тела, имеющего площадь опоры. Пусть на наклонной плоскости стоит цилиндр и не соскальзывает вниз (трение достаточно большое). Даже при сколь угодно большом трении цилиндр может *опрокинуться*.

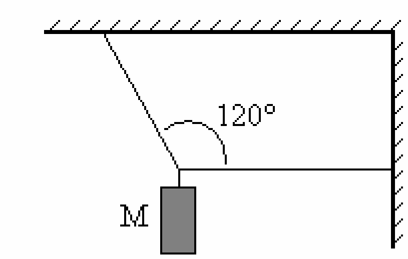
Тело, имеющее площадь опоры, не опрокидывается, если линия действия силы тяжести пересекает эту площадь, и опрокидывается, если не пересекает.

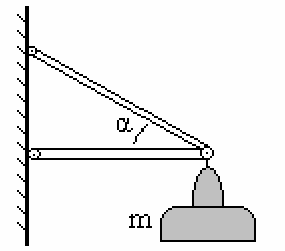


Цилиндр на рисунке справа будет опрокидываться, а на рисунке слева – не будет. Это легко показать, записывая правило моментов относительно оси, проходящей через самую нижнюю точку цилиндра.

Задачи

353. Груз массой M = 40 кг подвешен на двух тросах так, как показано на рисунке слева. Найдите силу натяжения каждого из тросов.

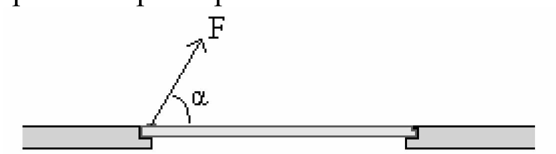




354. Фонарь массой m подвешен на двух стержнях, шарнирно прикреплённых к стене, так, как показано на рисунке справа. Найдите силу, с которой каждый из стержней действует на стену, если известен обозначенный на рисунке угол α. Массой стержней пренебречь.

355. Может ли фонарь быть подвешенным на двух тросах, натянутых между столбами или стенами зданий строго горизонтально? Ответ обосновать.

356. Однородная крышка люка в подпол в деревенском доме имеет массу m = 8 кг. Крышку тянут за кольцо силой, составляющей угол α = 60° с горизонтом. При каком минимальном значении силы крышка начнёт открываться? Трением пренебречь.

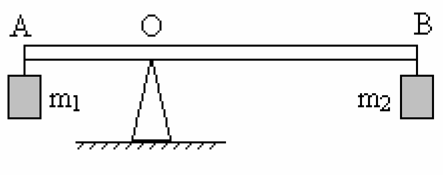


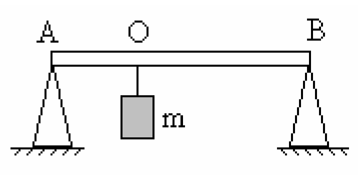
357. В предыдущей задаче найдите силу реакции опоры, действующей на крышку со стороны петель в момент, когда крышка начнёт открываться. Трением пренебречь.

358. На земле лежит железная труба массой m = 20 кг. Какую минимальную силу нужно приложить, чтобы приподнять трубу за один конец?

359. Дверь, висящую на петлях, открывают за ручку, прикреплённую на расстоянии d = 80 см от линии петель. Дверь начала открываться, когда сила, приложенная к ручке перпендикулярно плоскости двери, достигла значения F = 2 Н. Найдите общий момент сил трения в петлях.

360. На рисунке слева изображён рычаг, на котором уравновешены грузы массами m_1 = 3 кг и m_2 = 2 кг. Найдите длины отрезков AO и OB, если известно, что AB = 1 м. Массой рычага пренебречь.

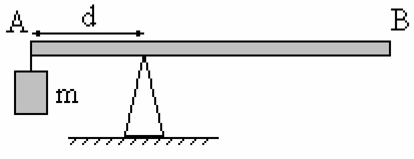


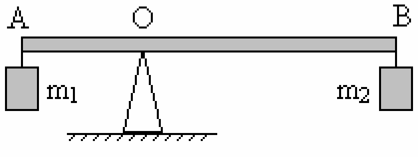


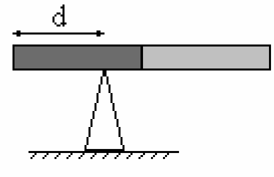
361. К планке, лежащей на двух опорах, подвешен груз массой m = 500 г (рис. справа). Найдите силу, с которой планка действует на каждую из опор, если AO = 20 см, OB = 30 см. Массой планки пренебречь.

362. На рисунке внизу слева груз массой m = 2 кг уравновешен массой рычага. Масса рычага M = 1 кг, а длина рычага AB = L = 0,9 м. Найдите расстояние d от точки опоры до точки подвеса груза.

363. На среднем рисунке m_1 = 4 кг, m_2 = 1 кг, AB = L = 1 м, AO = d = 0,3 м. Рычаг находится в равновесии. Найдите массу рычага.

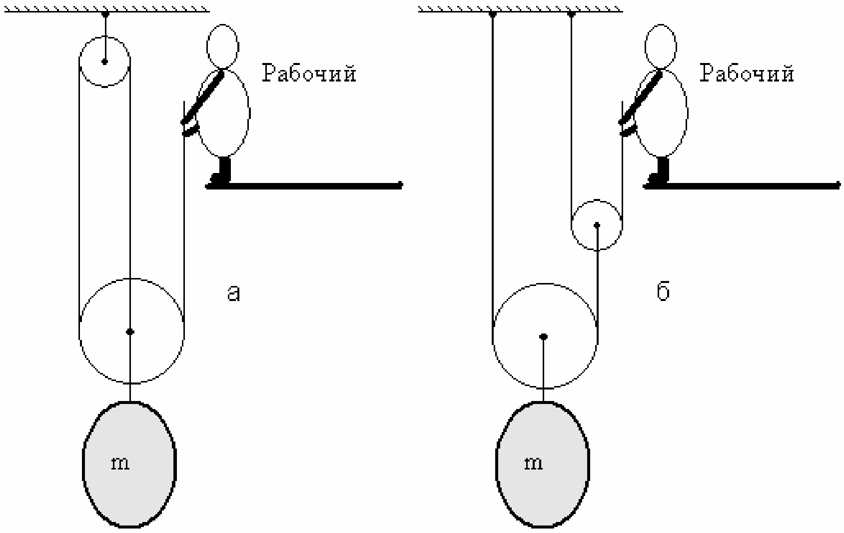






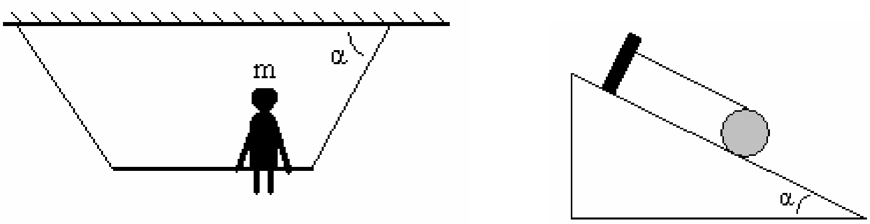
364. Два бруска одинаковых размеров – один алюминиевый, другой железный, – уравновешены на призме (рис. справа). Длина каждого бруска равна *l* = 15 см. Найдите расстояние d от верхней грани призмы до левого конца железного бруска. Плотность алюминия $\rho_a = 2700$ кг/м^3, плотность железа $\rho_ж = 7800$ кг/м^3.

365. Мешки с зерном массой m = 60 кг требуется поднимать на верхний ярус зернохранилища. Для этого два рабочих используют системы, показанные на рисунке. Вычислите силу, с которой каждый из рабочих тянет за свободный конец верёвки.



366. Требуется измерить массу груза с помощью динамометра. Максимальная сила, на которую рассчитан динамометр, равна 5 Н. Про массу груза ничего не известно. Можно использовать рычаг, масса которого тоже не известна. Предложите наиболее простой способ, как это сделать. Сделайте рисунок и напишите формулу, по которой следует рассчитывать массу груза.

367. На трапеции сидит гимнаст массой m = 60 кг (рисунок слева). Линия действия его силы тяжести пересекает трапецию на расстоянии 1/4 длины от её правого конца. Найдите силы натяжения тросов, на которых висит трапеция, если правый трос образует угол $\alpha = 60°$ с потолком. Найдите также, какой угол образует с потолком второй трос. Массой трапеции и тросов пренебречь.

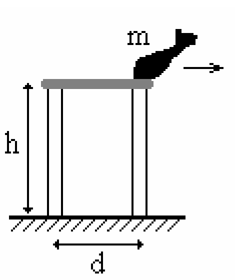


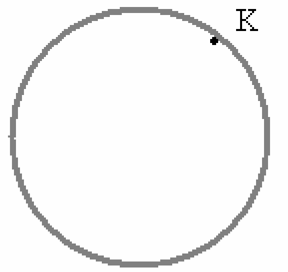
368. На наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, положили рулон туалетной бумаги. Конец бумаги закреплён так, как показано на правом рисунке. При каком минимальном коэффициенте трения между бумагой и наклонной плоскостью рулон бумаги не придёт в движение?

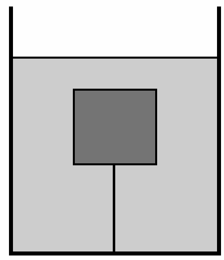
369. Может ли мяч лежать неподвижно на наклонной плоскости?

370. На твёрдой обложке книги стоят цилиндр и параллелепипед с одинаковой высотой и площадью основания. Основание параллелепипеда – квадрат со сторонами, параллельными границам обложки. Книгу медленно открывают, постепенно увеличивая угол её обложки с горизонтом. Что опрокинется раньше: цилиндр или параллелепипед? Проскальзывания нет.

371. На краю табуретки массой M = 4 кг сидит кошка массой m = 2 кг. Высота табуретки h = 60 см, а расстояние между ножками d = 30 см (рисунок слева). Коэффициент трения между ножками и полом равен $\mu = 0{,}4$. Кошка прыгает с табуретки в горизонтальном направлении, показанном стрелкой. С каким максимальным ускорением может двигаться её центр масс при прыжке, чтобы табуретка не пришла в движение? Если табуретка придёт в движение, то что начнётся раньше: проскальзывание или опрокидывание?





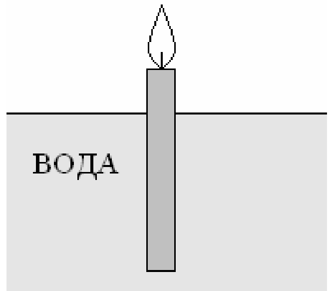


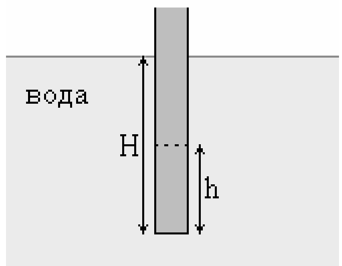
372. Однородное кольцо приложили к вертикальной стене и в точке K около него вбили гвоздь. В стену хотят вбить второй гвоздь, так, чтобы кольцо осталось в приданном ему положении. Укажите множество точек, в которые можно вбить второй гвоздь.

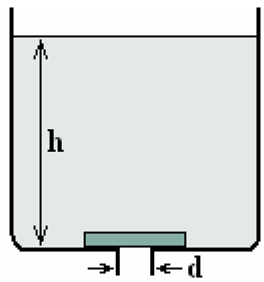
373. Сосновый брусок массой m = 400 г погружен в воду и привязан нитью ко дну сосуда (рисунок справа). Найдите силу натяжения нити. Плотность сосны ρ = 400 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3.

374. Корабль массой m = 1000 т входит из залива в реку. Плотность речной воды на n = 5% меньше, чем плотность воды в заливе. Груз какой массы нужно снять с корабля при входе в реку, чтобы объём погружённой в воду части корабля остался прежним?

375. Парафиновая свечка горит так, что её длина уменьшается со скоростью u = $5\cdot10^{-5}$ м/с, а парафин полностью сгорает (не стекает вниз). Свечку опустили в широкий сосуд с водой и слегка поддерживают в вертикальном положении, так, что она всплывает по мере сгорания (рисунок слева). С какой скоростью свечка движется относительно земли? Плотность воды равна $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, а плотность парафина равна $\rho_п$ = 0,9 г/см^3.



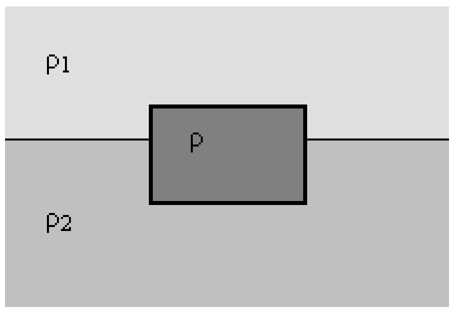


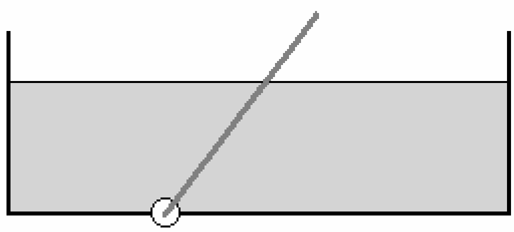


376. Бревно имеет диаметр d = 20 см. Его конец длиной H = 2 м вертикально опустили в воду (средний рисунок). Разделим бревно условно на две части: верхнюю и нижнюю длиной h = 1 м. С какой силой верхняя часть действует на нижнюю? Плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, плотность бревна $\rho_б$ = 680 кг/м^3.

377. В ванну налили воду до уровня h = 40 см и положили на сливное отверстие стеклянный брусок, масса которого равна m = 640 г (рисунок справа). Диаметр сливного отверстия d = 4 см. Вода подтекает под брусок, но очень медленно (уровень воды можно считать постоянным). С какой силой брусок давит на дно ванны? Плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, плотность стекла $\rho_с$ = 2500 кг/м^3.

378. Тело объёмом V = 2 дм^3 из материала плотностью ρ = 900 кг/м^3 плавает на границе раздела двух жидкостей плотностями ρ_1 = 800 кг/м^3 и ρ_2 = 1000 кг/м^3. Найдите объём частей тела, находящихся выше и ниже границы раздела. Докажите, что в этом случае можно применять формулу для силы Архимеда.





379. Ко дну сосуда с водой шарнирно прикреплена однородная сосновая палка длиной 1 м. Высота уровня воды в сосуде равна 0,6 м. Под каким углом к горизонту при этом наклонена палка? Плотность воды 1000 кг/м^3, а плотность сосны 600 кг/м^3.

380. Два груза одинаковой массы уравновешены на рычаге, находящемся в жидкости. Плотность первого груза в 5 раз больше плотности второго, а плотность второго груза в 3 раза больше плотности жидкости. Расстояние от точки опоры рычага до точки подвеса первого груза равно 15 см. Найдите расстояние от точки опоры до точки подвеса второго груза. Массой рычага пренебречь.

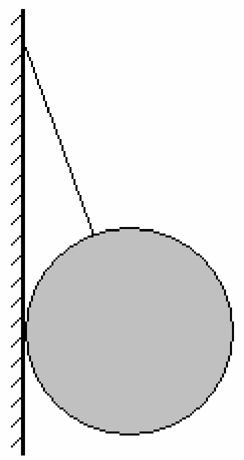
381. Два груза одинакового объёма уравновешены на рычаге, находящемся в жидкости. Плотность первого груза в 5 раз больше плотности второго, а плотность второго груза в 3 раза больше плотности жидкости. Расстояние от точки опоры рычага до точки подвеса первого груза равно 4 см. Найдите расстояние от точки опоры до точки подвеса второго груза. Массой рычага пренебречь.

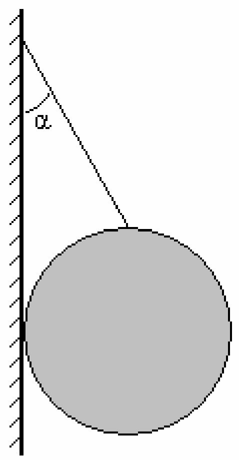
382. Два груза массами m_1 и m_2 уравновешены на рычаге. Когда грузы полностью погрузили в воду, равновесие сохранилось. Найдите отношение плотностей грузов. Массой рычага пренебречь.

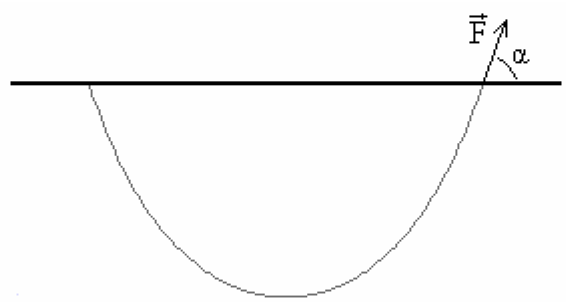
383. В цилиндрическую кастрюлю радиусом $r = 10$ см налита вода до уровня $h = 15$ см. В кастрюлю бросили губку (кусок поролона) массой $m = 60$ г. Губка впитала в себя часть воды, но продолжала плавать на поверхности. Найдите установившийся уровень воды в кастрюле. Плотность воды $\rho =$ 1000 кг/м^3.

384. К одному концу тонкостенной трубочки для питья радиуса r прилепили кусок пластилина массой m. Трубочку в вертикальном положении опустили в жидкость на глубину h, много большую размеров куска пластилина. С какой силой кусок пластилина действует на трубочку, если плотность жидкости равна ρ_1, а плотность пластилина равна ρ_2? Верхний конец трубочки открыт и находится в воздухе.

385. Однородный шар массой $m = 30$ кг и радиусом $R = 20$ см подвешен к вертикальной абсолютно гладкой стене на тросе, длина которого равна $l = 1,6$ м. Найдите силу давления шара на стену и силу натяжения троса.







386. Однородный шар подвешен к вертикальной стене на тросе, прикреплённом к верхней точке шара. Трос образует со стеной угол α. Найдите минимальный коэффициент трения между шаром и стеной, при котором такое возможно.

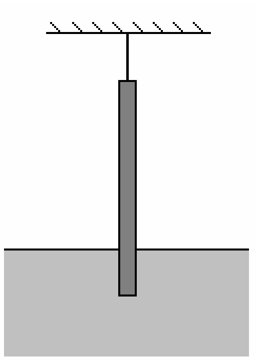
387. Цепочка массой $m = 20$ г подвешена за два конца к горизонтальной поверхности (рисунок сверху справа). Силы, действующие на цепочку в точках подвеса, образуют угол $\alpha = 60°$ с горизонтом. Найдите силу натяжения среднего звена цепочки. Масса одного звена много меньше массы всей цепочки.

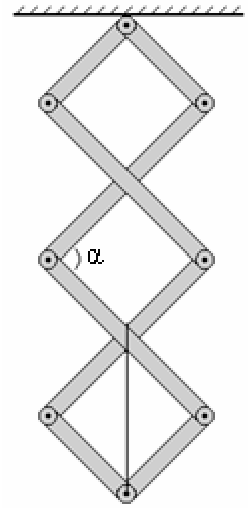
388. Лестница длиной $l = 6$ м, приставленная к вертикальной стене, образует с ней угол $\alpha = 30°$. Коэффициент трения между лестницей и полом равен $\mu = 0,5$, а трение между стеной и лестницей отсутствует. По лестнице поднимается человек, масса которого много больше массы лестницы. На какую максимальную высоту над полом может подняться человек, чтобы лестница при этом не начала скользить?

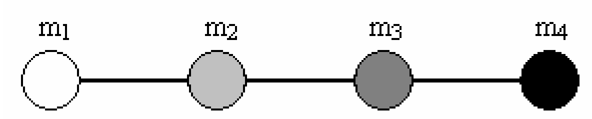
389. Лестница, приставленная к вертикальной стене, образует с ней угол α. Коэффициент трения между лестницей и полом равен μ_1, а между лестницей и стеной – μ_2. По лестнице поднимается человек, масса которого много больше массы лестницы. При каком соотношении между α, μ_1 и μ_2 человек сможет безопасно подняться на любую ступеньку лестницы?

390. Водитель автомобиля затормозил на горизонтальном участке дороги, заблокировав только переднюю колёсную пару. При этом тормозной путь автомобиля был равен L_1. Если бы водитель заблокировал только заднюю колёсную пару, то тормозной путь при тех же условиях был бы равен L_2. Чему будет равен тормозной путь автомобиля, если при тех же условиях заблокировать все четыре колеса? Центр масс автомобиля равноудалён от колёсных осей. Все колёса одинаковые.

391. Тонкую однородную палочку длины L, подвешенную на нити, медленно погружают в жидкость (рис. слева). Плотность палочки равна $\rho_п$, а плотность жидкости – $\rho_ж$, причём $\rho_ж > \rho_п$. При погружении на какую глубину вертикальное положение палочки нарушится?



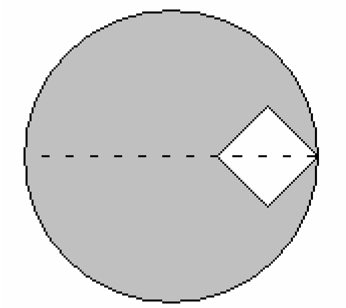


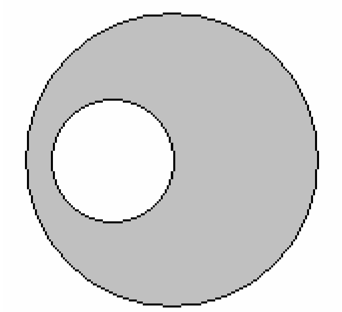


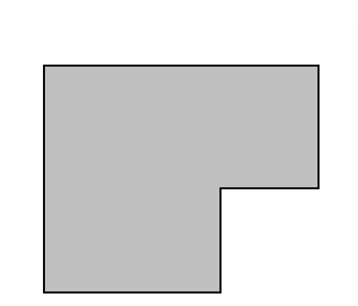
392. На среднем рисунке показана однородная шарнирная конструкция, подвешенная к потолку. Полная масса конструкции равна m. Найдите силу натяжения нити, которой связано нижнее звено конструкции, если угол между её планками равен $\alpha = 90°$.

393. На невесомый стержень длиной L = 90 см насажены четыре шарика массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг и $m_4 = 4$ кг, так, как показано на рисунке справа. Определите положение центра масс получившейся конструкции.

394. Из однородной круглой металлической пластинки радиуса R вырезали квадрат со стороной d, так, как показано на рисунке слева. Найдите положение центра масс получившейся пластинки.







395. Из однородного шара радиуса R вырезали шар меньшего радиуса r (средний рисунок). Расстояние между центрами шара и получившейся пустой полости равно d. Найдите положение центра масс получившейся конструкции.

396. Найдите положение центра масс однородной пластинки (рис. справа) с помощью построения одной линейкой.

397. Докажите, что центром масс однородной треугольной пластинки является точка пересечения медиан.

398. Опишите алгоритм нахождения центра масс однородной пластинки, имеющей форму произвольного выпуклого четырёхугольника, с помощью циркуля и линейки.

Изучая механику и другие разделы физики, мы всегда заменяем реальные тела моделями. В предыдущих главах при решении задач мы часто использовали модели «материальная точка» и «абсолютно твёрдое тело». Мы редко встречались в задачах с жидкостями. Напомним некоторый материал, касающийся жидкостей.

Из курса 7 класса нам известна формула для *гидростатического давления*. Давление столба однородной жидкости плотностью ρ и высотой h равно

$$P = \rho g h \qquad (70)$$

Нам также известна формула (38) для силы Архимеда и некоторые особенности этой силы (см. §17):

$$F_{Арх} = \rho g V \qquad (38)$$

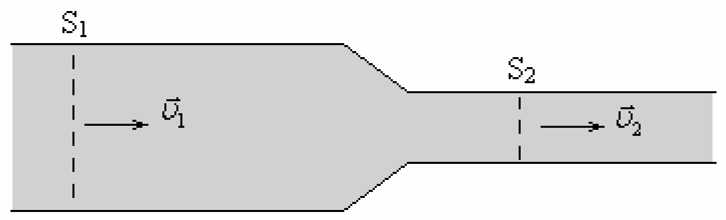
Эта формула справедлива, когда жидкость покоится относительно инерциальной системы отсчёта. Можно обобщить её на случай, когда жидкость как целое движется равноускоренно (этому посвящены задачи 201 и 202; здесь мы к этому возвращаться не будем).

В этой главе мы рассмотрим стационарное течение жидкостей. ***Стационарное течение – это такое течение, при котором скорость жидкости в каждой точке пространства не меняется со временем.***

При этом мы будем пользоваться моделью несжимаемой жидкости, т.е. жидкости, общий объём которой не меняется (иными словами, *плотность несжимаемой жидкости не зависит от давления*).

§ 38. Уравнение непрерывности

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется труба переменного сечения («широкая» труба с площадью поперечного сечения S_1 соединяется с «узкой» трубой с площадью поперечного сечения S_2). Пусть по этой трубе течёт несжимаемая жидкость.

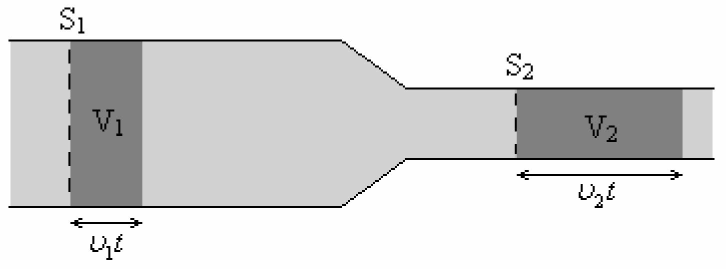


Спрашивается, как соотносятся между собой скорости жидкости υ_1 и υ_2 в широкой и в узкой части трубы? Иными словами, как найти υ_2, если известно υ_1, и наоборот?

Попробуйте сначала самостоятельно решить эту задачу. Если не получится – читайте дальше.

Для решения учтём, что жидкость несжимаема. Это означает, что *через каждое поперечное сечение трубы за один и тот же промежуток времени протекают одинаковые объёмы жидкости*. Иначе жидкость бы накапливалась в какой-то части трубы, но этого не происходит.

Пусть за время t через сечение S_1 протекает объём жидкости V_1, а через сечение S_2 – объём V_2.



Имеем: $V_1 = V_2$. Теперь учтём, что $V_1 = S_1\upsilon_1 t$ и $V_2 = S_2\upsilon_2 t$ (объём цилиндра с площадью основания S и высотой υt).

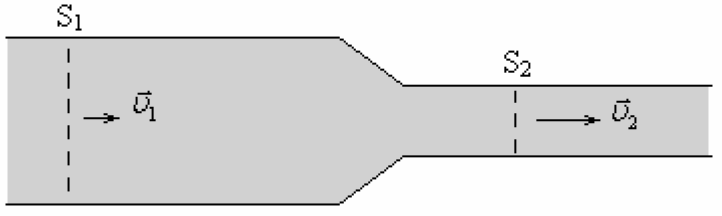
$S_1\upsilon_1 t = S_2\upsilon_2 t$. Время t сокращается, и мы получаем:

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 \qquad (71)$$

Это уравнение выражает «закон сохранения объёма» несжимаемой жидкости и называется ***уравнением непрерывности***. Из него следует, что *в узкой части трубы скорость больше, чем в широкой.*

§ 39. Уравнение Бернулли

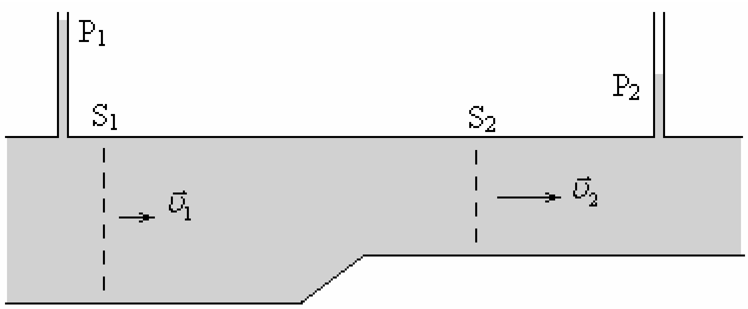
Продолжим рассматривать стационарное течение жидкости по трубе. Теперь нас интересует, как соотносятся между собой давления жидкости в широкой и в узкой части трубы.



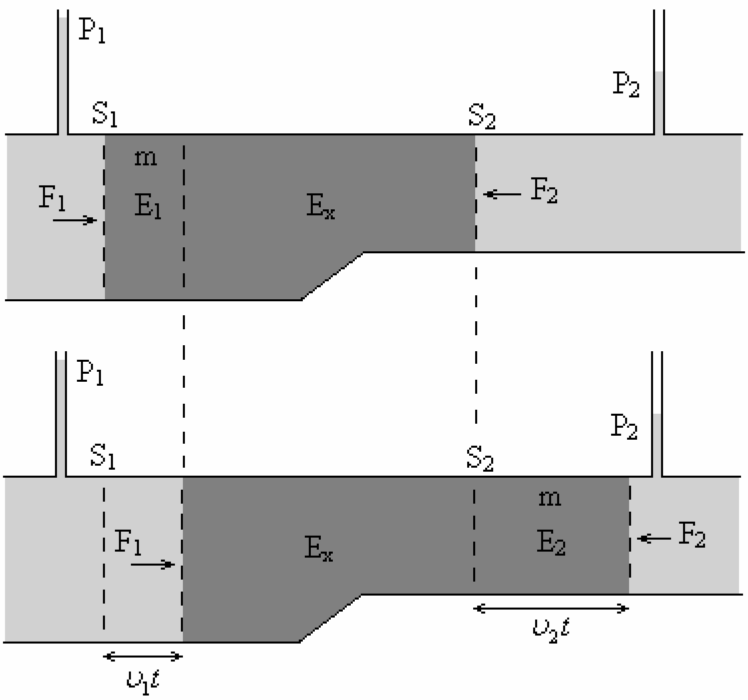
В предыдущем параграфе мы выяснили, что в узкой части скорость больше, чем в широкой. Значит, при переходе из широкой части в узкую жидкость движется с ускорением. А это значит, что равнодействующая всех сил, действующих на жидкость, направлена в сторону узкой части (вправо). Это приводит нас к выводу, что *давление жидкости в узкой части трубы меньше, чем в широкой*.

Будем выводить формулу, связывающую давления в узкой и широкой части трубы, из энергетических соображений. Пользоваться законами Ньютона напрямую неудобно, т.к. мы не знаем распределение скоростей жидкости вблизи стыка широкой и узкой части трубы. Но мы знаем кинетическую энергию любой массы жидкости в широкой и узкой части трубы (то есть, начальное и конечное состояние). Поэтому мы можем воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии.

Рассмотрим случай, когда труба находится на одном горизонтальном уровне, чтобы не учитывать изменение потенциальной энергии жидкости. Высота столбика жидкости в барометрических трубках показывает давление P_1 и P_2.



Выделим мысленно некоторый участок жидкости (более тёмный на следующем рисунке), и рассмотрим перемещение некоторой массы m жидкости из широкой части трубы в узкую. Пусть E_1 и E_2 – кинетические энергии жидкости массой m в широкой и в узкой частях трубы, а E_x – кинетическая энергия средней части жидкости. Эта энергия не изменяется.



Найдём суммарную работу сил, действующих на выделенный участок жидкости. Работа силы давления слева равна $A_1 = F_1\upsilon_1 t = P_1 S_1 \upsilon_1 t$, $A_2 = -F_2\upsilon_2 t = -P_2 S_2 \upsilon_2 t$. Работа силы тяжести равна нулю, т.к. высота центра масс жидкости не меняется. И сделаем ещё одно важное допущение: *пренебрегаем силами вязкого трения* внутри жидкости и при контакте жидкости со стенками трубы. То есть, считаем жидкость *идеальной*. Изменение кинетической энергии (по соответствующей теореме) равно суммарной работе всех сил:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A_1 + A_2 = P_1 S_1 \upsilon_1 t - P_2 S_2 \upsilon_2 t.$$

Выразим массу через объём и плотность: $m = \rho S_1 \upsilon_1 t = \rho S_2 \upsilon_2 t$. Подставим в предыдущую формулу:

$$\frac{\rho S_2 \upsilon_2 t \upsilon_2^2}{2} - \frac{\rho S_1 \upsilon_1 t \upsilon_1^2}{2} = P_1 S_1 \upsilon_1 t - P_2 S_2 \upsilon_2 t.$$

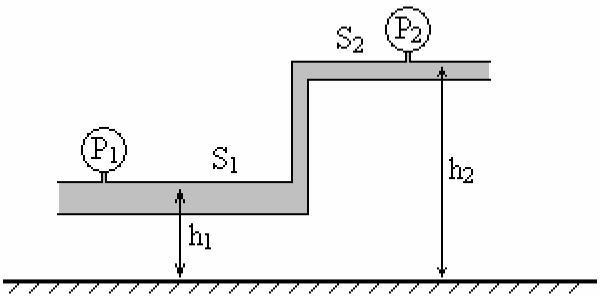
Учитывая, что $S_1 \upsilon_1 t = S_2 \upsilon_2 t$ (формула (71) или двумя строчками выше), видим, что $S_1 \upsilon_1 t$ и $S_2 \upsilon_2 t$ сокращаются, и остаётся:

$$\frac{\rho\upsilon_2^2}{2} - \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = P_1 - P_2,$$ или

$$P_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} \qquad (72)$$

Эта формула связывает давление жидкости со скоростью её течения. Она подтверждает, что давление больше там, где скорость меньше (это утверждение называется Законом Бернулли). Отметим, что формула (72) справедлива для течения жидкости без трения и на одной высоте.

Формулу (72) можно обобщить, если рассматривать течение жидкости на разной высоте (см. следующий рисунок; манометры показывают давления P_1 и P_2). Для этого нужно к суммарной работе всех сил добавить работу силы тяжести.



Работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии, взятому с обратным знаком:
$A_{тяж} = -(mgh_2 - mgh_1) = mgh_1 - mgh_2$.

Добавляя это выражение в сумму всех работ, получим уравнение

$$P_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 \qquad (73)$$

Это уравнение носит название **уравнения Бернулли**. Отметим, что оно является очевидным следствием формулы (72), если учесть формулу (70) для гидростатического давления.

Уравнение Бернулли (70) справедливо лишь для модели идеальной жидкости (несжимаемой жидкости без вязкого трения). Однако общая закономерность – ***давление больше там, где скорость меньше*** – справедлива и для сжимаемых жидкостей, обладающих вязкостью. Более того, она справедлива и для газов.

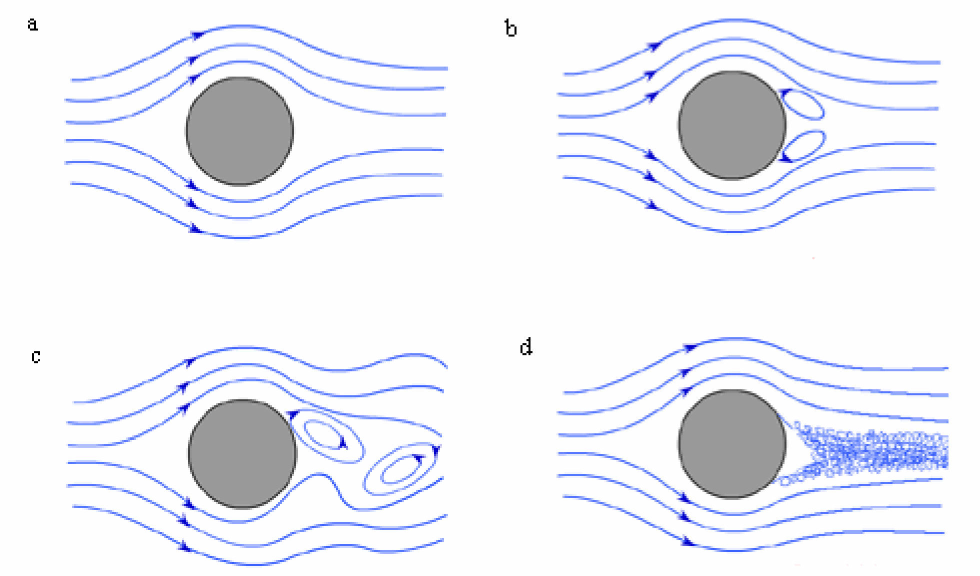
§ 40. Ламинарное и турбулентное течение

Задачи гидродинамики, связанные с расчётом распределения скоростей течения жидкости в сосуде сложной формы, сложны с математической точки зрения, но вполне решаемы методами компьютерного моделирования. Наибольшую сложность представляют случаи, когда при течении жидкости возникает *турбулентность*. Течение жидкости (или газа) по его структуре принято разделять на ламинарное и турбулентное.

Ламинарное течение (лат. *lamina* — пластинка, полоска) — упорядоченное течение, при котором жидкость или газ перемещается слоями без перемешивания между соседними слоями и пульсаций скоростей и давлений.
Турбулентное течение (лат. *turbulentus* — бурный, беспорядочный) – течение жидкости или газа, сопровождающееся появлением *вихрей*, при котором в движении жидкости появляется хаотичность, т.е. скорость, температура, давление и плотность среды испытывают резкие хаотические изменения.

При заданной форме сосуда и препятствий, обтекаемых жидкостью, а также заданных свойствах жидкости, течение является ламинарным при низких скоростях, а начиная с некоторого порога скорости становится турбулентным. Турбулентное течение является существенно нестационарным, поскольку скорость частиц жидкости, давление и другие характеристики среды изменяются во времени и пространстве нерегулярно, случайным образом даже при постоянных внешних условиях.

На рисунке изображено обтекание жидкостью препятствия при различных скоростях течения.



a) При малых скоростях течение является ламинарным.
b) При достижении некоторого значения скорости исходный вид течения нарушается. За цилиндром образуются два вихря, но наступает установившийся режим течения, при котором течение вновь стационарно и ламинарно.
c) Если скорость увеличивать дальше, стационарное движение теряет устойчивость. Вихри удлиняются, отрываются и уплывают с потоком жидкости. В результате за цилиндром образуется вихревая дорожка. Движение становится нестационарным, турбулентным (но в определённой мере периодическим).
d) При дальнейшем увеличении скорости вихри уже не успевают формироваться и заменяются быстротурбулизирующимися областями. Движение становится нерегулярным (проявляется хаотичность); при очень больших скоростях турбулентная область продвигается вплоть до поверхности цилиндра.

§ 41. Понятие об аэродинамике. Подъёмная сила крыла

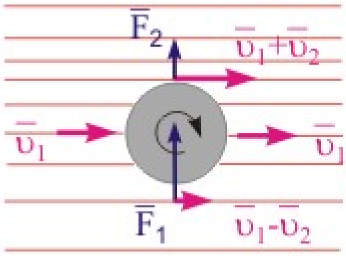
Аэродинамика изучает движение газов или движение твёрдых тел и жидкостей в газообразных средах. Для газов справедливы в качественном (т.е. в принципиальном) отношении все выводы, сделанные нами касательно жидкостей в предыдущих параграфах. Справедлив закон Бернулли: давление больше там, где скорость меньше. Остаются прежними понятия о стационарном, ламинарном и турбулентном течении.

Однако газы по ряду свойств существенно отличаются от жидкостей. Прежде всего, газы, по сравнению с жидкостями, легко сжимаются. При рассмотрении жидкости мы могли считать её несжимаемой, однако для газов такая модель неприменима. Плотность газа существенно зависит от его давления. Более того, плотность газа зависит и от температуры. Поэтому при рассмотрении газов приходится учитывать происходящие в них тепловые потоки. Приходится записывать уравнение состояния газа (связь давления, плотности и температуры) и привлекать термодинамику. Из-за этого динамика газов несколько сложнее, чем динамика жидкости.

Уравнение непрерывности (71), полученное для жидкости, выражает закон сохранения объёма. Но объём газа при движении не сохраняется, т.к. меняется плотность. Однако по-прежнему сохраняется масса (или число частиц), и можно получить более общее уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения числа частиц.

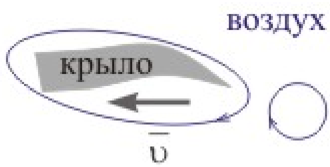
Мы будем в этой главе использовать только качественные (принципиальные) соображения при рассмотрении газов. Более подробно газы изучаются в разделе «Молекулярная физика и термодинамика». Рассмотрим эффект возникновения подъёмной силы при движении твёрдого тела в газе.

Пусть вращающийся цилиндр погружен в газовый поток (см. рисунок). Прилегающие к нему слои молекул участвуют в двух движениях: в потоке и в круговом движении, обусловленном наличием вязкого трения между цилиндром и газом. Линии тока для простоты нарисованы прямыми, как будто цилиндра нет.

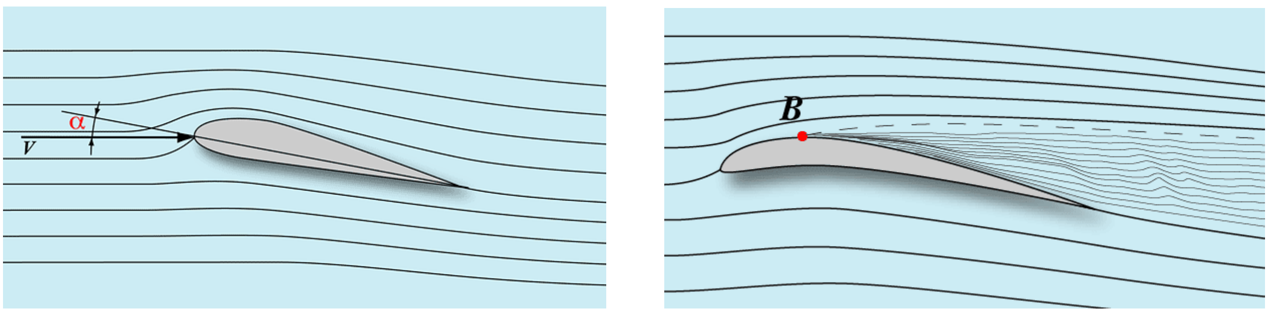


Пусть υ_1 – скорость потока, а υ_2 – скорость кругового движения. Из закона сложения скоростей следует, что скорость потока газа над цилиндром выше, чем под ним. Следовательно, по закону Бернулли, давление над цилиндром будет ниже, чем под ним, и появляется подъемная сила.
Возникновение подъемной силы в результате циркуляции воздуха вокруг твердого тела называется эффектом Магнуса.

Наиболее важным примером является наличие подъемной силы у крыла самолета при его движении в воздухе. Из-за специальной формы крыла вблизи его острой задней кромки в близлежащих слоях воздуха возникают вихревые воздушные потоки, причем направление вращения молекул происходит против часовой стрелки (крыло движется влево). Эти вихревые потоки постепенно нарастают и отрываются от крыла, но за счет наличия вязкого трения они заставляют вращаться по часовой стрелке вокруг поверхности крыла прилегающие к ней молекулы воздуха. Наличие циркуляции, обусловленной вязким трением, приводит к возникновению подъемной силы.



Вообще говоря, для возникновения подъёмной силы воздух не обязательно должен циркулировать вокруг крыла. Главное – чтобы его скорость сверху была больше, чем скорость снизу, и тогда, по закону Бернулли, давление снизу будет больше, чем сверху. На следующем рисунке показаны формы крыла, при которых круговое движение воздуха вокруг крыла не происходит (слева – ламинарное течение, справа – турбулентное).



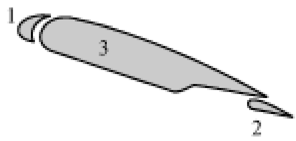
Подъемная сила крыла пропорциональна динамическому давлению $\frac{\rho\upsilon^2}{2}$ (один из членов в формуле (73)), площади крыла S и вычисляется по формуле

$$F_п = CS\frac{\rho\upsilon^2}{2} \qquad (74)$$

где C – коэффициент подъемной силы, зависящий от формы крыла и угла атаки α (рис. сверху слева). Если бы воздух обтекал крыло безотрывно, то C возрастал бы пропорционально α. Однако опыты показывают, что при углах атаки α = 12° - 18° (в зависимости от формы крыла) подъемная сила достигает максимума, а затем начинает падать.

Угол атаки, при котором коэффициент C максимален, называется посадочным или критическим, а соответствующий коэффициент также называется посадочным. У обычных крыльев $C_{пос}$ = 1,2 - 1,6. Срыв потока и образование завихрения приводит к повышению давления над крылом и уменьшению подъемной силы.

Коэффициент C определяет посадочную скорость самолета $v_{пос}$, определяемую из равенства подъемной силы весу самолета. Для снижения скорости посадки необходимо предотвратить срыв потока при увеличении угла атаки. В современной авиации этого добиваются применением на крыльях посадочных приспособлений - подкрылков (1) и закрылков (2), выдвигаемых механически из крыла (3) при посадке самолета.



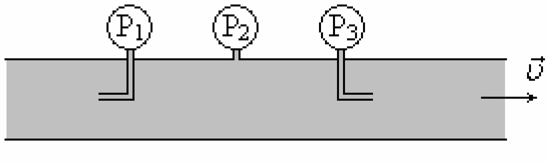
Задачи

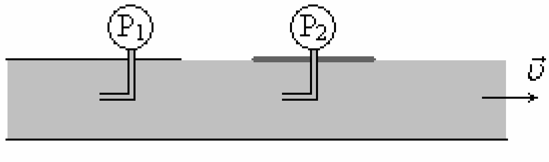
399. Из шланга с площадью поперечного сечения S = 1,5 см^2 вытекает V = 300 л воды за время t = 10 мин. Найдите скорость воды в шланге.

400. Из водопроводного крана диаметра d = 1,4 см течёт вертикальная струя воды. Скорость воды на выходе из крана равна υ_0 = 1 м/с. Если внимательно посмотреть на струю, то можно увидеть, что она сужается. Найдите диаметр струи на расстоянии h = 10 см от крана. Капиллярными эффектами пренебречь.

401. Имеется ли сила сопротивления среды при равномерном прямолинейном движении шара в идеальной жидкости? Ответ обосновать.

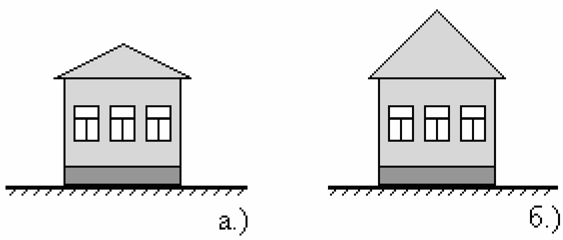
402. По трубе течёт жидкость со скоростью υ. В трубу встроены три манометра с тонкими патрубками, показанными на рисунке слева. Первый манометр показывает давление P_1. Что показывают два другие манометра? Плотность жидкости ρ. Манометр показывает разность полного и атмосферного давлений. Жидкость считать идеальной.





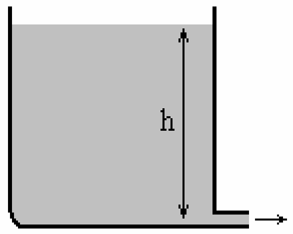
403. В ручей опустили манометр с изогнутым патрубком (рис. справа), и держат неподвижно, и он показывает давление $P_1 = 10^4$ Па. Если этот же манометр закрепить на поплавке, который движется вместе с водой, то он покажет давление $P_2 = 2\cdot10^3$ Па. Найдите скорость воды в ручье.

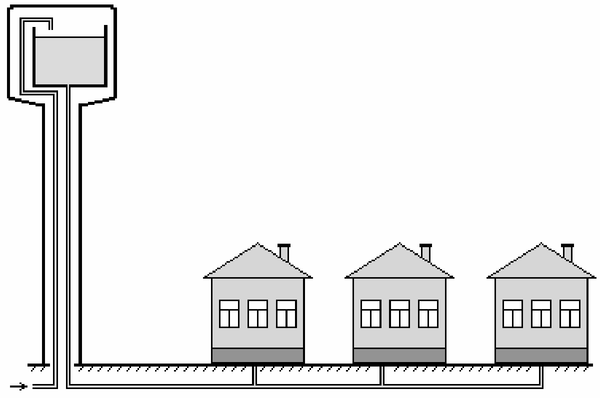
404. Две конструкции крыши дома сравнивают на устойчивость к сильному ветру. Оказалось, что конструкция на рисунке а) менее устойчива, чем конструкция на рисунке б). Объясните, почему.



405. В водопроводной трубе образовалось маленькое отверстие площадью S = 1 мм^2, из которого бьёт вертикально вверх струя воды, поднимаясь на высоту h = 80 см. Какой объём воды вытекает через отверстие за t = 1 час?

406. Вода вытекает из открытого сверху сосуда через узкую трубку (рис. слева). Площадь поперечного сечения трубки много меньше, чем площадь поверхности воды в сосуде. Найдите скорость вытекания воды из трубки, если высота уровня воды над трубкой равна h (формула Торричелли).



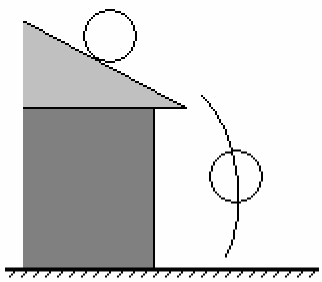


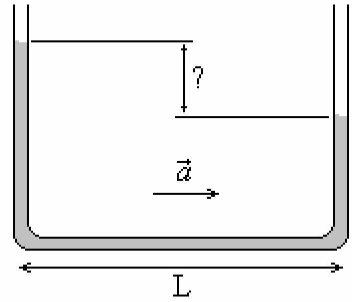
407. Деревня снабжается водой с помощью водонапорной башни (рис. справа). В верхней части башни находится резервуар с водой. Высота башни вместе с резервуаром равна h = 40 м. В каком случае (в приближении какой модели) можно вычислить скорость истечения воды из открытых кранов в домах с помощью формулы Торричелли (см. предыдущую задачу)? Чему равна эта скорость? Что нужно учитывать, чтобы вычислить эту скорость более точно?

408. Если подключить шланг к выходному отверстию пылесоса (так, чтобы воздух выдувался из шланга) и поместить в струю мячик для настольного тенниса, то мячик будет парить в струе и при перемещении шланга следовать за ним. Объясните явление.

409. Капли дождя массой m = 50 мг падают вертикально. Из-за сопротивления воздуха их скорость устанавливается постоянной. Оцените (вычислите приближённо) скорость падения капель, считая их сферическими. Плотность воды ρ_1 = 1000 кг/м^3, плотность воздуха ρ_2 = 1,29 кг/м^3.

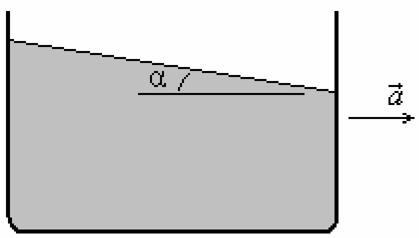
410. Почему лёгкий бумажный цилиндр, скатываясь с наклонной плоскости, движется не по параболе, а отклоняется к основанию наклонной плоскости (рис. слева)?

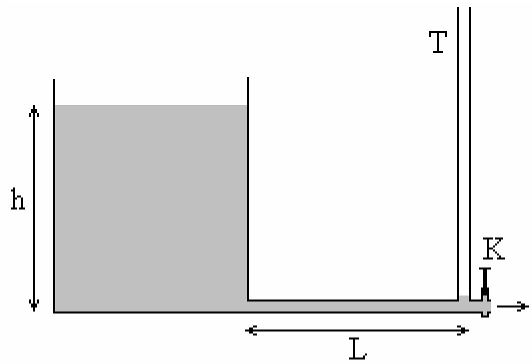




411. Тонкая U-образная трубка с жидкостью движется с ускорением *a* (рис. справа). Найдите разность высот уровней жидкости в коленах трубки, если длина её горизонтального участка равна L.

412. Жидкость находится в баке с плоскими вертикальными стенками, который движется с постоянным ускорением *a*, направленным горизонтально (рис. слева). Жидкость покоится относительно бака. Докажите, что поверхность жидкости плоская, и найдите угол, который она образует с горизонтом. Капиллярными эффектами пренебречь.





413. «Водяной таран». Жидкость вытекает из широкого сосуда через узкую трубку (рис. справа). В момент, когда высота столба жидкости в сосуде равна h, клапан K на конце трубки резко перекрывают, и жидкость вбрасывается в высокое вертикальное ответвление трубки T, имеющее такое же сечение, как горизонтальная часть трубки. До какой высоты поднимется жидкость в вертикальном ответвлении? Длина горизонтального участка трубки равна L; жидкость идеальная.

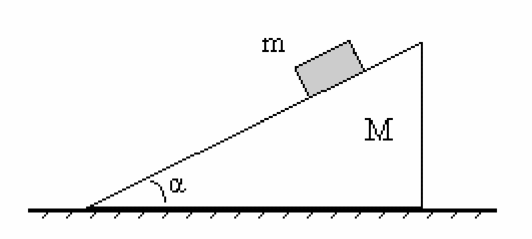
414. «Подкрученный мяч». Объясните, как и за счёт какого эффекта можно забить мяч в футбольные ворота с углового удара при отсутствии ветра и без помощи других игроков. Сделайте рисунок и укажите, в какую сторону нужно подкручивать мяч.

В этой главе рассмотрены темы, которые не освещены или освещены слабо в школьной программе и стандартных школьных учебниках. Тем не менее, их знание будет полезно участникам олимпиад, поступающим в ВУЗы и желающим изучать физику в дальнейшем.

§ 42. Уравнение кинематической связи

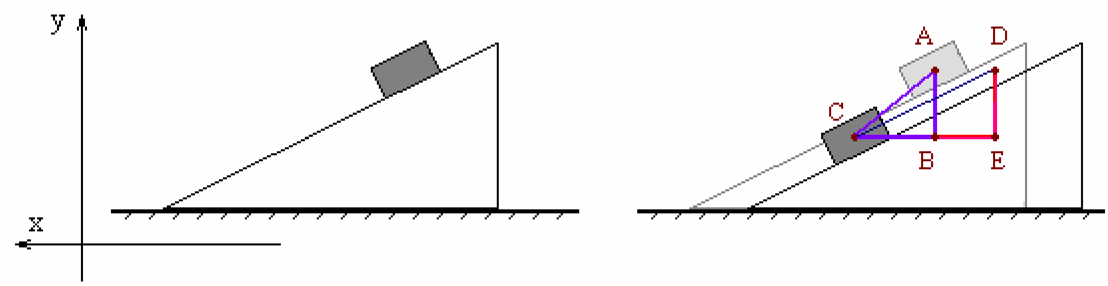
Рассмотрим в качества примера следующую задачу.

На горизонтальном столе стоит клин массой M*, образующий угол* α *с горизонтом. На клин кладут брусок массой* m *и отпускают. С какими ускорениями будут двигаться клин и брусок относительно стола? Трения в системе нигде нет.*



Попробуйте сначала решить эту задачу самостоятельно. Может быть, у вас получится. После этого читайте дальше.

Решение. Очевидно, что брусок будет двигаться относительно стола под углом к горизонту, не равным α, а превышающим его (на рисунке справа отрезок AC – участок траектории бруска относительно стола. На этом рисунке бледными линиями изображено начальное положение бруска и клина, а чёрными линиями – положение в некоторый последующий момент). Поэтому не имеет смысла вводить систему координат, одна ось которой параллельна наклонной плоскости клина. Введём систему координат так, как показано на рисунке слева. Пусть $a_{\text{к.x}}$ и $a_{\text{к.y}}$ – проекции ускорения клина относительно стола на координатные оси, $a_{\text{б.с.x}}$ и $a_{\text{б.с.y}}$ – проекции ускорения бруска относительно стола.



Записывая второй закон Ньютона для бруска и для клина и расписывая полученные уравнения в проекциях, получим систему уравнений:

$$a_{\text{к.x}} = -\frac{\mathrm{N}\sin\alpha}{\mathrm{M}},$$

$$a_{\text{к.y}} = 0,$$

$$a_{\text{б.с.x}} = \frac{\mathrm{N}\sin\alpha}{\mathrm{m}},$$

$$a_{\text{б.с.y}} = \frac{\mathrm{N}\cos\alpha}{\mathrm{m}} - g,$$

где N – сила реакции опоры, действующая на брусок. Как видим, в этой системе 4 уравнения, но 5 неизвестных. Чтобы решить задачу, не хватает ещё какого-то одного уравнения. Откуда его взять? Второй закон Ньютона в системе отсчёта, связанной с клином, записывать нельзя: она неинерциальная. Можно ещё записать закон сложения ускорений, аналогичный закону сложения скоростей (7):

$$\vec{a}_{\text{т.н}} = \vec{a}_{\text{п.н}} + \vec{a}_{\text{т.п}}$$

Но один этот закон не даст ничего нового. Действительно, расписывая две проекции этого закона, мы получим два новых уравнения, но также и две новые неизвестные. Число неизвестных будет по-прежнему на единицу больше числа уравнений. Недостающее уравнение следует из геометрических соображений: *ускорение бруска относительно клина образует с горизонтом угол* α. Если мы запишем этот факт на языке формул, то всё получится. Однако можно рассуждать даже проще, не переходя в систему отсчёта, связанную с клином. На рисунке справа AB – модуль проекции перемещения бруска относительно стола на ось Oy; BC – модуль проекции той же величины на ось Ox; BE – модуль проекции перемещения клина на ось Ox. Из рисунка ясно, что $\angle \mathrm{DCE} = \alpha$. Поэтому

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{CB} + \mathrm{BE}}$$

Если разделить малое перемещение на малое время, за которое оно совершено (устремить время к нулю, как в §4), то получим скорость. Аналогично, если разделить малое изменение скорости на время, за которое оно совершено, получим ускорение. Поэтому можно записать:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{-a_{\text{б.с.y}}}{a_{\text{б.с.x}} - a_{\text{к.x}}}$$

Это и есть уравнение, которого нам не хватало. Теперь мы можем решить систему. Найдём силу реакции опоры:

$$N = \frac{gMm}{M\cos\alpha + (M+m)tg\alpha\sin\alpha}$$

и проекции ускорений:

$$a_{\text{к.x}} = -\frac{mg\sin\alpha}{M\cos\alpha + (M+m)tg\alpha\sin\alpha}, \qquad a_{\text{б.с.x}} = \frac{Mg\sin\alpha}{M\cos\alpha + (M+m)tg\alpha\sin\alpha},$$

$$a_{\text{б.с.y}} = \frac{Mg\cos\alpha}{M\cos\alpha + (M+m)tg\alpha\sin\alpha} - g\,.$$

Теперь легко найти модуль ускорения бруска относительно стола, применяя теорему Пифагора в треугольнике ABC: $a_{\text{б.с}} = \sqrt{\left(\frac{Mg}{M\cos\alpha + (M+m)tg\alpha\sin\alpha}\right)^2 - \frac{2Mg^2\cos\alpha}{M\cos\alpha + (M+m)tg\alpha\sin\alpha} + g^2}$.

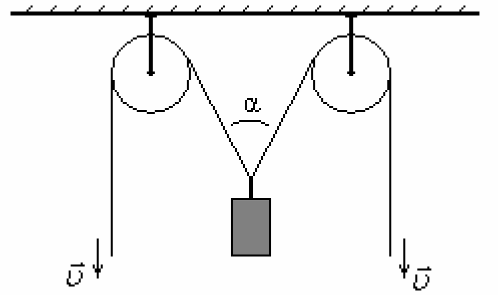
Уравнение, которого нам не хватало в этой задаче и которое мы получили из геометрических соображений, называется *уравнением кинематической связи*. ***Уравнение кинематической связи – это уравнение, связывающее кинематические характеристики тел системы*** (перемещения, скорости, ускорения и т.д.). Откуда берутся уравнения кинематической связи? Во многих случаях они следуют из геометрических соображений, как было в рассмотренной задаче. Иногда они следуют из каких-то дополнительных условий.

Для нахождения уравнений кинематической связи применяются следующие приёмы:

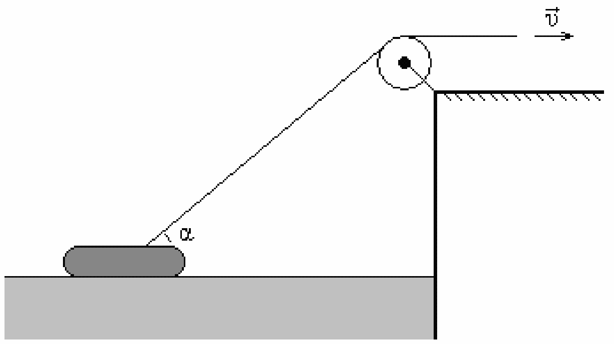
1. Используются определения скорости, ускорения и других кинематических характеристик.
2. Учитываются геометрические характеристики тел и их взаимное расположение (как было в рассмотренной выше задаче).
3. Рассматриваются две (или более) удобные системы отсчёта, записывается закон сложения скоростей, ускорений и т.д. (это тоже один из возможных путей решения рассмотренной задачи).
4. Вектор скорости (ускорения и т.д.) какой-либо точки раскладывается на две составляющие. Обычно вектор раскладывается на две перпендикулярные составляющие (это самый быстрый способ решения задач 415-418).
5. Если в задаче участвует нерастяжимая нить – нужно учитывать, что её длина не изменяется (то есть, сколько убыло в одних местах, столько прибыло в других). С такими примерами мы не раз сталкивались в предыдущих главах, но там кинематическая связь записывалась просто. Если изменения длин участков нити поделить на время (точнее, взять производную по времени) – получатся скорости. Так получаются соотношения скоростей.
6. Учитываются особенности кинематики абсолютно твёрдого тела, с которыми мы познакомимся в следующем параграфе.

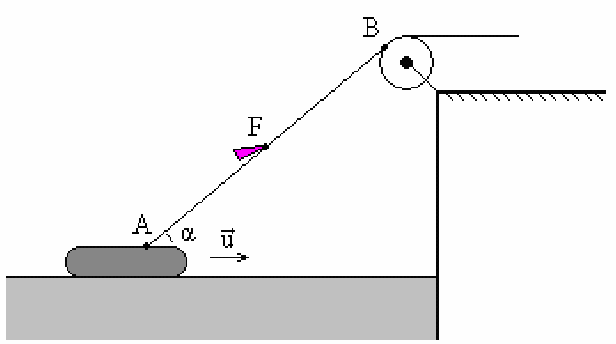
Задачи

415. Груз поднимают с помощью двух верёвок, перекинутых через блоки. Свободные концы верёвок вытягивают с одинаковой скоростью υ. В некоторый момент концы верёвок, прикреплённые к грузу, образуют угол α (рисунок слева; он симметричен относительно линии движения груза). Чему равна скорость груза в этот момент?



416. Лодку подтягивают к берегу за верёвку так, как показано на рисунке слева. При этом горизонтальный участок верёвки движется с постоянной скоростью υ. В некоторый момент верёвка образует угол α с горизонтом. Чему равна скорость лодки в этот момент?

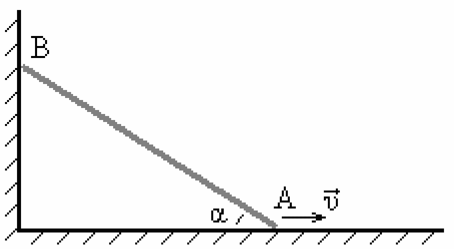


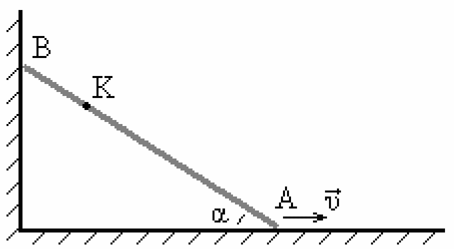


417. Лодку подтягивают к берегу за верёвку так, как показано на рисунке справа. К верёвке привязан маленький флажок F. В некоторый момент скорость лодки равна u, верёвка образует угол α с горизонтом, а флажок находится на середине отрезка AB. Найдите скорость флажка в этот момент.

418. Кот Леопольд едет на велосипеде равномерно и прямолинейно со скоростью V = 18 км/ч, а его глаза находятся на высоте h = 1,2 м над полотном дороги. На дороге, прямо на линии движения велосипеда, сидят два злобных мышонка и направляют в глаза Леопольду луч света от карманного фонарика. С какой угловой скоростью мышата должны поворачивать фонарик в момент, когда луч света составляет угол α = 30° с полотном дороги, чтобы луч всё время попадал в глаза? Найдите в общем виде зависимость угловой скорости от угла α.

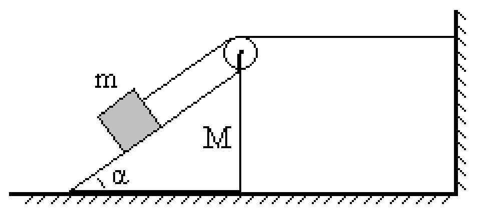
419. Жёсткий стержень движется так, как показано на рисунке слева: нижний конец движется по горизонтальному полу, а верхний – по вертикальной стене, и стержень находится в вертикальной плоскости. В некоторый момент стержень образует с полом угол α, и его нижний конец A движется со скоростью υ. Чему равна в этот момент скорость верхнего конца B?

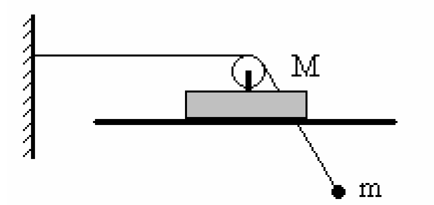




420. В условиях предыдущей задачи найдите скорость точки K, показанной на рисунке справа, такой, что $\frac{AK}{AB} = k$.

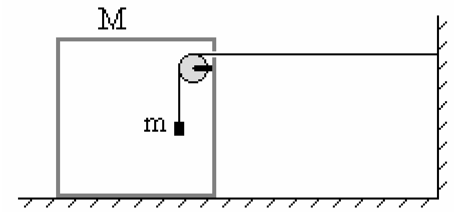
421. На абсолютно гладком полу стоит абсолютно гладкий клин массой M, образующий угол α с горизонтом. На клин кладут груз массой m, привязанный к стене невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (рис. слева), и отпускают. С каким ускорением будет двигаться клин? Блок невесом, трения нигде нет.

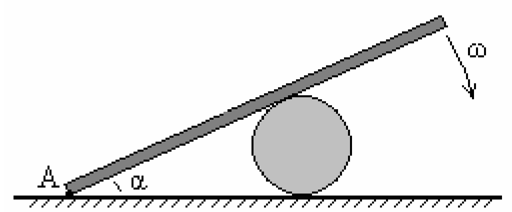




422. Брусок массой M может скользить по горизонтальным рельсам (рис. справа), причём коэффициент трения между ним и рельсами равен μ. На бруске установлен блок, через который перекинута невесомая нерастяжимая нить, привязанная одним концом к стене, а другим – к маленькому шарику массой m. Система движется так, что участок нити между блоком и шариком образует неизменный во времени угол с вертикалью. Найдите этот угол и ускорение бруска. Блок невесом, трения в нём нет.

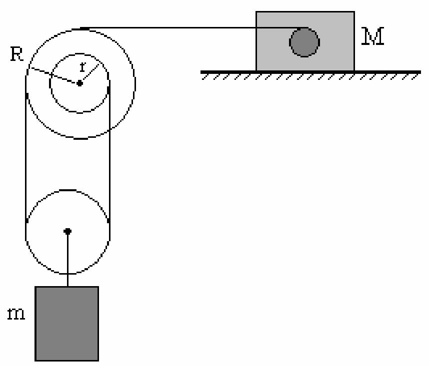
423. На полу стоит коробка массой M. В коробке к нити прикреплён грузик массой m, как показано на рис. слева. Его сначала держат рукой. Правый конец нити прикреплён к стене. Нить невесомая и нерастяжимая, блок тоже невесом и может вращаться без трения. Грузик отпускают, и коробка начинает скользить. Найдите ускорение коробки в начальный момент (сразу после отпускания).

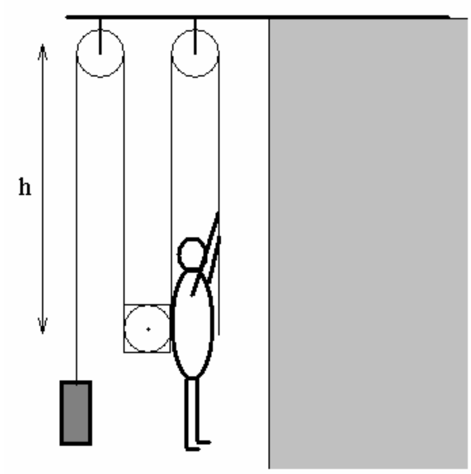




424. Доска, шарнирно закреплённая в точке A, вращается вокруг этой точки с постоянной угловой скоростью ω (рис. справа). При этом из-под доски выкатывается цилиндр, двигаясь без проскальзывания по горизонтальной поверхности пола и не отрываясь от доски. Найдите зависимость угловой скорости вращения цилиндра вокруг своей оси от угла α, который доска образует с горизонтом.

425. Груз массой m прикреплён к подвижному блоку, подвешенному на нити, один из концов которой намотан на шкив радиусом r, а другой перекинут через соосный, скреплённый с первым шкив радиусом R и наматывается на вал, приводимый во вращение электромотором M (рис. слева). Скорость горизонтального участка нити равна V. Найти полезную мощность, развиваемую электромотором. Нить не проскальзывает по шкивам, трения нет.





426. Человек поднимается на высокое здание вдоль верхнего участка его стены длиной h = 20 м с помощью системы, состоящей из груза, верёвки и трёх блоков, один из которых закреплён за спиной (рис. справа). В начальный момент система вместе с человеком была неподвижна. Когда человек поднимался, конец верёвки в его руках двигался относительно стены со скоростью υ = 1,2 м/с. Сколько времени длился подъём? Блоки и верёвка невесомы, трения нет.

§ 43. Элементы кинематики и статики абсолютно твёрдого тела

§ 44. Понятие о бесконечно малых величинах

Рассмотрим в качества примера две задачи.

Задача 1. *Сосуд, имеющий форму куба, длина ребра которого равна* d = 1 м*, заполнен водой. С какой силой вода давит на боковую стенку сосуда? Атмосферное давление не учитывать.*

Решение. Построим график зависимости гидростатического давления P от глубины h (рис. 30). Далее разобьём высоту вертикальной стенки сосуда на много маленьких отрезков. Длину каждого отрезка обозначим за Δh. Таким образом, вертикальную стенку мы разбили на много полосок длиной 1 м и высотой Δh. Так как каждая полоска узкая, давление во всех её точках можно приближённо считать одинаковым. Поэтому сила, действующая на одну полоску, примерно равна $F = PS = P \cdot \Delta h \cdot d$. Нарисуем под графиком прямоугольники со сторонами P и Δh (рис. 30, а). Сила F, действующая на одну полоску, равна площади одного прямоугольника, умноженной на d = 1 м. Значит, сила, действующая на всю вертикальную стенку, примерно равна сумме площадей маленьких прямоугольников, умноженной на d = 1 м.

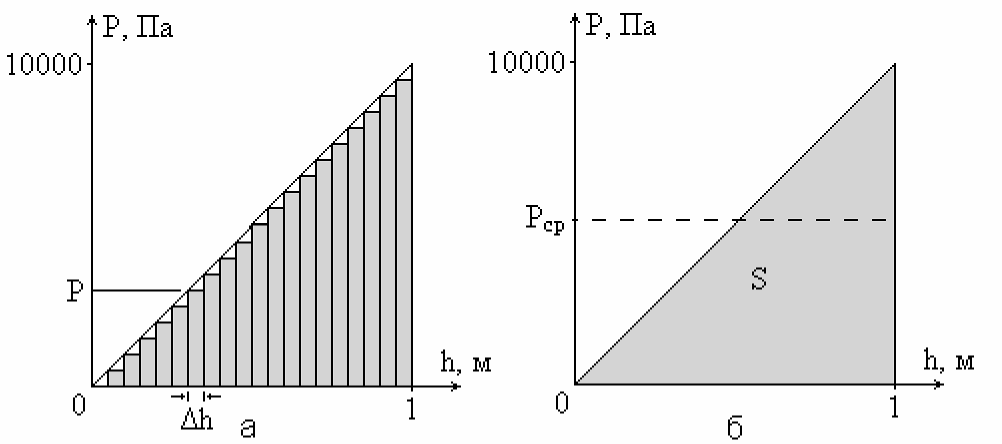


Рис. 30

Чем меньше ширина полоски Δh, тем точнее вычисляется сила, т.к. давление в точках одной полоски можно с большей точностью считать одинаковым. Из этих рассуждений следует, что *сила давления на боковую стенку равна площади фигуры под графиком* (в данном случае – треугольника)*, умноженной на 1 м*. Теперь вы легко найдёте эту силу: площадь треугольника равна половине площади прямоугольника со сторонами 1 м и 10000 Па («площадь» выражается в данном случае в Па·м).

Отметим, что мы нашли способ вычисления ***среднего давления***. Давление $P_{ср}$ является средним, если площадь прямоугольника, обозначенного пунктиром (рис. 30, б) равна площади фигуры под графиком (в данном случае – треугольника).

Задача 2. *Кирпичная башня высотой* h = 50 м *имеет массу* m = 500 т. *Какую работу совершили при строительстве башни носильщики, поднимающие кирпичи к месту укладки? Башня однородна по длине: любые два её участка одинаковой длины имеют одинаковую массу.*

Решение. Работа равна потенциальной энергии башни. Построим график зависимости высоты башни от её массы во время строительства (рис. 72). Разобьём башню на много маленьких отрезков. Массу каждого отрезка обозначим за Δm. Так как каждый отрезок маленький, потенциальную каждого кирпича в нём можно считать одинаковой. Поэтому потенциальная энергия одного отрезка примерно равна $E_p = \Delta mgh$. Нарисуем под графиком прямоугольники со сторонами h и Δm (рис. 72, а). Потенциальная энергия одного отрезка равна площади одного прямоугольника, умноженной на g. Значит, полная потенциальная энергия башни, примерно равна сумме площадей маленьких прямоугольников, умноженной на g.

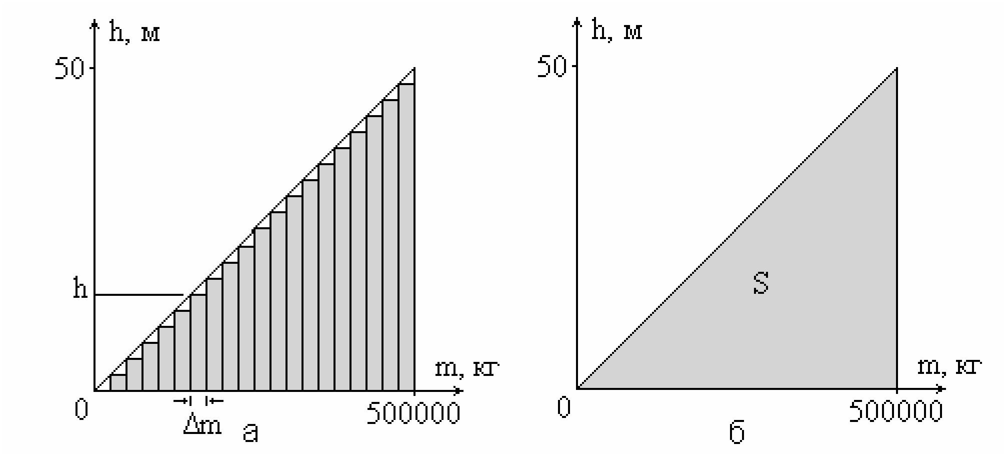


Рис. 72

Чем меньше масса Δm, тем точнее вычисляется энергия, т.к. энергию кирпичей на одном отрезке можно с большей точностью считать одинаковым. Из этих рассуждений следует, что *потенциальная энергия башни равна площади фигуры под графиком* (в данном случае – треугольника), *умноженной на g*. Теперь вы легко найдёте эту энергию: площадь треугольника равна половине площади прямоугольника со сторонами 500000 кг и 50 м («площадь» выражается в данном случае в кг·м).

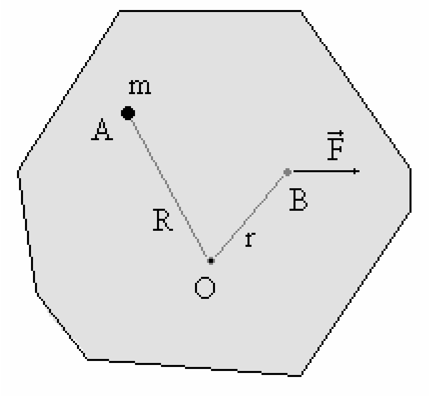
§ 45. Уравнение движения тела с переменной массой (уравнение Мещерского)

§ 46. Понятие об условно вводимых силах инерции. Центробежная сила

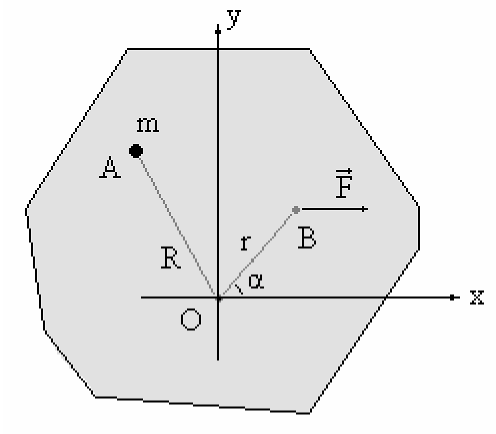
§ 47. Элементы динамики абсолютно твёрдого тела

Рассмотрим задачу.

Невесомая абсолютно твёрдая пластина насажена на перпендикулярную ей ось O и может вращаться вокруг этой оси без трения. На расстоянии R от оси находится точка A, в которой закреплён маленький груз массой m. На расстоянии r от оси находится точка B, к которой приложили силу F. Известны модуль и направление этой силы относительно лаборатории, в которой закреплена ось O. Найдите ускорение груза, а также угловое ускорение пластины, в начальный момент (в момент начала действия силы). Действие происходит в невесомости.



Примечание.

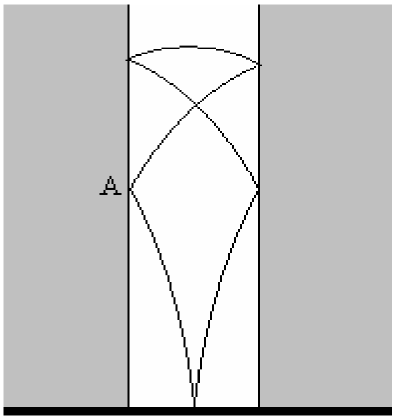


§ 48. Разные задачи

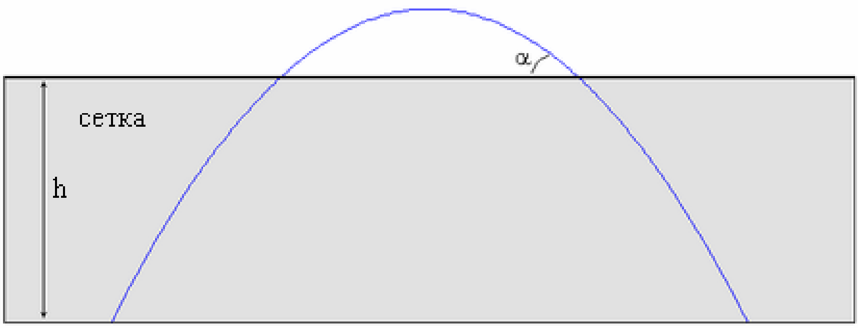
Разные задачи

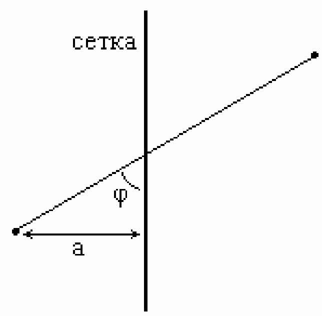
Задачи

427. В арке около одной из стен стоит мальчик и бросает мяч из точки А, находящейся на высоте h = 170 см над землёй. Начальная скорость мяча υ = 15 м/с. Мяч вернулся в точку бросания спустя t = 3 с, описав траекторию, показанную на рисунке. Чему равно расстояние между стенами арки? Под каким углом к горизонту был брошен мяч? Все соударения мгновенные и абсолютно упругие, сопротивлением воздуха пренебречь.

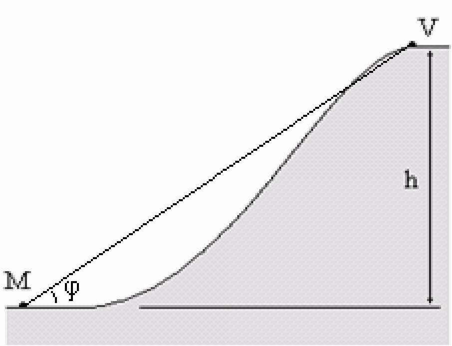


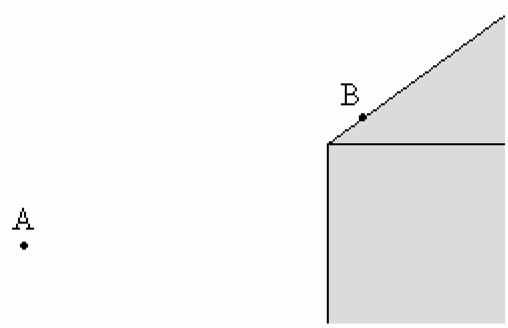
428. При игре в волейбол игрок отбил мяч у самой земли. На левом рисунке показана проекция траектории мяча на плоскость сетки. Касательная к этой проекции образует угол α = 30° с верхней линией сетки в точке пересечения с ней. На правом рисунке показан вид сверху: игрок в момент удара находился на расстоянии a = 3,5 м от сетки, а плоскость траектории образует с сеткой угол φ = 60°. Скорость мяча сразу после удара была направлена под углом θ = arctg1,2 к горизонту. На какой высоте над землёй траектория мяча пересекает плоскость сетки? Высота сетки h = 2,4 м. Мяч считать материальной точкой, сопротивлением воздуха пренебречь.





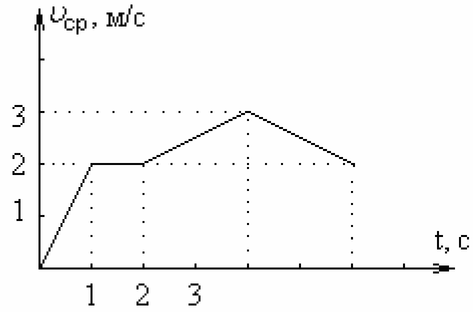
429. Митя и Витя играют в снежки. Витя стоит на вершине земляного вала, а Митя – у его подножья. Они одновременно бросают снежки из точек M и V (рис. слева), и снежки сталкиваются в середине отрезка MV. Найдите высоту вала h и отношение пути, пройденного снежком Вити, к пути, пройденного снежком Мити, если известно, что φ = 30°, начальная скорость снежка Мити υ_0 = 14 м/с, а Витя бросил свой снежок горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.





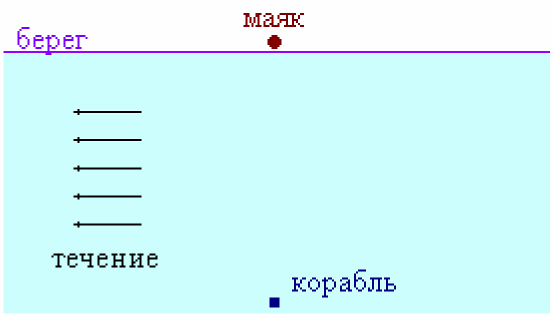
430. Вовочка бросает мяч из точки А в сторону сарая (рис. справа). Мяч абсолютно упруго отражается от плоской крыши сарая в некоторой точке В и возвращается в руки к Вовочке (в точку А). Известно, что время полёта мяча из точки А в точку В равно t_1 = 2 с, а время его полёта из В в А равно t_1 = 2,2 с. Найти длину отрезка АВ. Сопротивлением воздуха пренебречь.

431. Тело движется по прямой в одном направлении. В каждый момент времени вычисляется средняя скорость движения тела за время от начального до текущего момента. Строится график зависимости вычисленной таким образом средней скорости тела от времени.



Постройте график зависимости мгновенной скорости тела от времени.

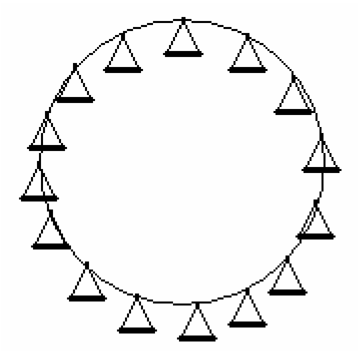
432. Капитан корабля заметил строго на севере береговой маяк и приказал держать курс на него. В этот момент расстояние до берега было равно S = 60 км. Корабль движется относительно воды со скоростью V = 60 км/ч и в каждый момент времени держит курс на маяк. Экипаж не знает о присутствии на море западного течения, скорость которого во всех точках одинакова и равна u = 20 км/ч.



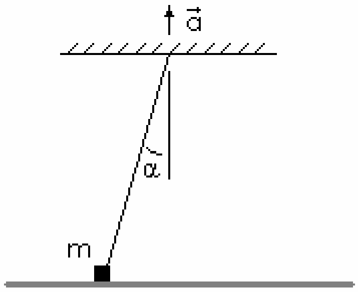
1. За какое время корабль доплывёт до маяка?
2. За какое минимальное время корабль мог бы достигнуть маяка, двигаясь с той же скоростью, если бы он двигался более оптимальным образом?

433. На горизонтальном столе лежит однородный куб массой m с длиной ребра d. Коэффициент трения между кубом и столом равен μ. К середине одного из рёбер верхней грани куба прикладывают силу, направленную перпендикулярно этому ребру. При каком минимально возможном значении этой силы куб сдвинется с места? Под каким углом к горизонту должна быть направлена минимальная сила? В каком случае произойдёт проскальзывание, а в каком – опрокидывание?

434. Колесо обозрения радиуса R = 63 м вращается с постоянной угловой скоростью в вертикальной плоскости, совершая полный оборот за время T = 50 с. Кабинки колеса обозрения движутся поступательно. На горизонтальный пол одной из кабинок кладут предмет. При каком минимальном коэффициенте трения между предметом и полом предмет не начнёт скользить ни в одной точке траектории, по которой движется кабинка? В какой точке предмет начнёт скользить и в каком направлении, если коэффициент трения будет чуть меньше необходимого?

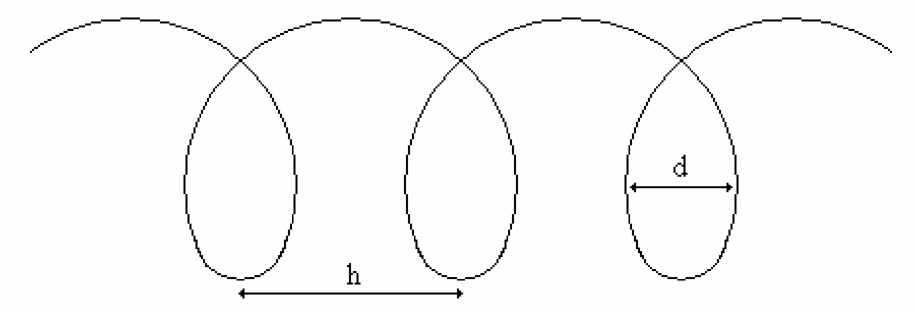


435. На горизонтальном столе лежит грузик массой m, привязанный нитью к платформе сверху (см. рис). Нить невесома и нерастяжима и образует угол α с вертикалью. Платформа начинает двигаться вверх с ускорением a. Найдите силу натяжения нити в момент начала движения с ускорением в случае, если грузик не отрывается от стола. Найдите также условие, при котором грузик не отрывается от стола в этот момент. Коэффициент трения между грузиком и столом μ.

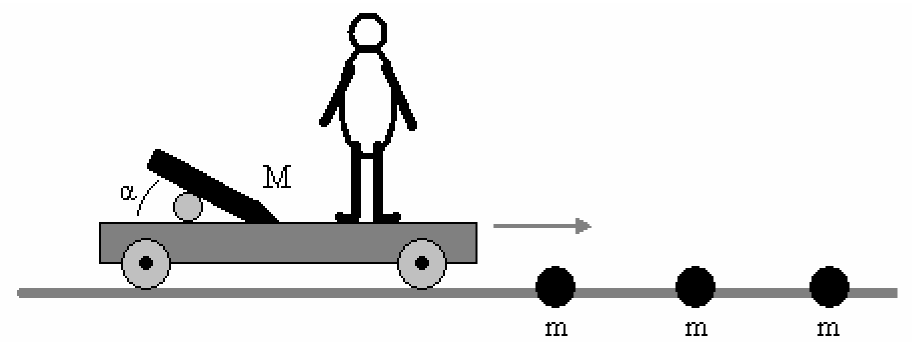


436. Грузик массой m, привязанный нитью к платформе (см. рис. к предыдущей задаче), движется по окружности с линейной скоростью υ и угловой скоростью ω на абсолютно гладкой поверхности стола. Нить невесома и нерастяжима и образует угол α с вертикалью. Платформа начинает двигаться вверх с ускорением a. Найдите силу натяжения нити в момент начала движения платформы в случае, если грузик не отрывается от стола. Найдите также условие, при котором грузик не отрывается от стола в этот момент.

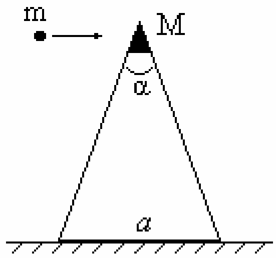
437. Две материальные точки массами m_1 и m_2 находятся на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности и связаны невесомой нерастяжимой нитью длины L. Точка массой m_1 закреплена, а точка массой m_2 движется вокруг неё по окружности. Точку m_1 освобождают, и точка m_2 начинает двигаться по траектории, изображённой на рисунке. Найдите шаг траектории h и ширину петли d.



438. По железной дороге катится вагонетка, на которой установлена пушка. Ствол пушки направлен назад по ходу вагонетки и образует угол α с её горизонтальным полом. Общая масса вагонетки, пушки и пушкаря, стоящего на вагонетке, равна M. Вдоль дороги разложены снаряды (ядра) для пушки. Масса каждого ядра равна m. Пушкарь поднимает с земли ядро, заряжает, стреляет, поднимает следующее ядро, снова стреляет, и так далее. Каждое ядро вылетает из ствола со скоростью υ относительно пушки. До какой максимальной скорости может разогнаться вагонетка при такой стрельбе? Трением при качении вагонетки и массой пороха пренебречь.

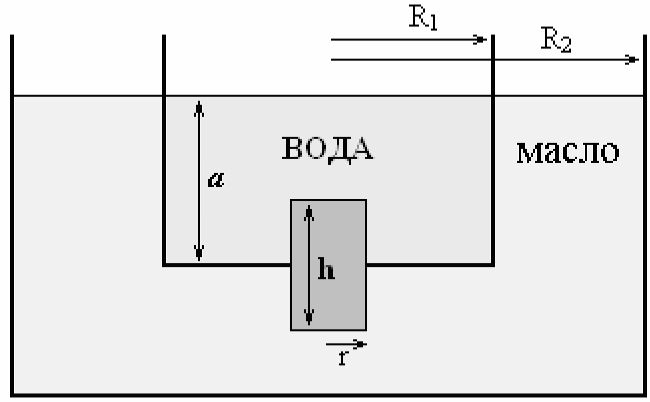


439. На столе стоит прямая призма, сечением которой является равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при вершине (см. рисунок). Вся масса M призмы сосредоточена вблизи вершины (остальная часть призмы сделана из лёгкого материала). В вершину призмы попадает пуля массой m, летевшая горизонтально, и отражается от неё абсолютно упруго. При какой минимальной скорости пули призма опрокинется от удара, если проскальзывание между призмой и столом отсутствует? Какой минимальный коэффициент трения между призмой и столом обеспечивает отсутствие проскальзывания в момент удара пули? Удар считать мгновенным.

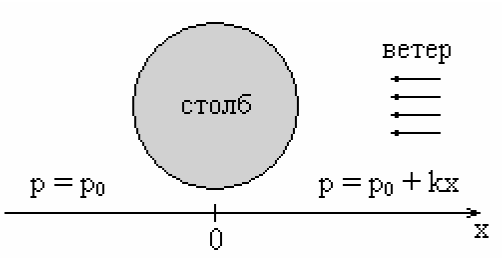


440. Один цилиндрический сосуд удерживают внутри другого так, как показано на рисунке. В дне малого сосуда есть отверстие, в которое вставлен деревянный цилиндр высотой h = 21 см. В малый сосуд налита вода до уровня a = 30 см, а в большой – масло, и при этом цилиндр покоится. Плотность воды равна ρ_1 = 1000 кг/м^3, плотность масла равна ρ_2 = 790 кг/м^3, а плотность цилиндра равна ρ = 600 кг/м^3. Трения между цилиндром и малым сосудом нет.

1. Какая часть объёма цилиндра находится в воде, а какая – в масле?
2. Обозначим радиус цилиндра за r, радиус малого сосуда за R_1, а радиус большого сосуда за R_2. При каком соотношении между r, R_1 и R_2 равновесие цилиндра будет устойчивым?



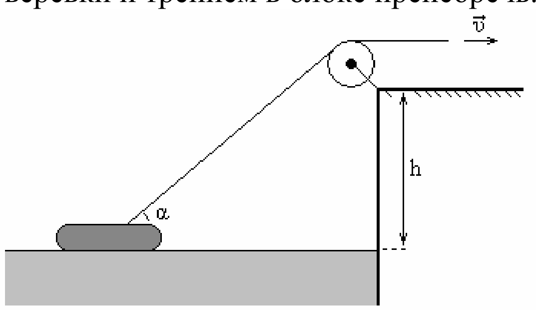
441. Фонарный столб высоты h = 9 м и радиуса R = 10 см обдувается ветром. В некоторый момент давление воздуха на столб зависело только от координаты x, причём так, как показано на рисунке: p = p_0 = 10^5 Па при x < 0, и p = p_0 + kx при x > 0, где k = 300 Па/м. С какой силой ветер действовал на столб в этот момент?



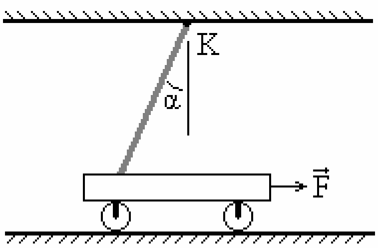
442. Из трубы, конец которой расположен близко к земле, течёт струя воды. Конец трубы образует угол α с горизонтом, а скорость воды на выходе из трубы равна υ_0. На какой высоте над землёй находится центр масс находящейся в воздухе воды? Поверхность земли горизонтальна.

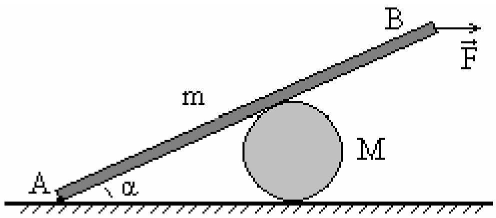
443. На горизонтальном столике лежит маленькая шайба массой m = 100 г. Столик покрыт такой смазкой, что при движении шайбы со скоростью $\vec{\upsilon}$ возникает сила вязкого трения, равная $\vec{F}_{тр} = -\gamma\vec{\upsilon}$, где γ = 0,4 кг/с. Сухого трения нет. На шайбу начинают действовать силой, вектор которой вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω = 3 рад/с (ν = 0,48 Гц), а модуль не меняется со временем и равен F = 0,3 Н. В установившемся режиме шайба движется по окружности. Найдите её радиус.

444. Лодку массой m подтягивают к берегу за верёвку так, как показано на рисунке. Берег выше уровня воды на величину h. При этом горизонтальный участок верёвки движется равномерно со скоростью υ, а на лодку действует со стороны воды сила сопротивления, пропорциональная скорости лодки: $\vec{F} = -\gamma\vec{u}$. В некоторый момент верёвка образует угол α с горизонтом. Найдите силу натяжения верёвки в этот момент. Массой верёвки и трением в блоке пренебречь.



445. На горизонтальном полу стоит тележка. На неё опирается стержень, шарнирно закреплённый в точке K и образующий угол α с вертикалью (рис. слева). На тележку начинает действовать горизонтальная сила F, постепенно увеличивающаяся со временем. Найти минимальный коэффициент трения между стержнем и тележкой, при котором тележка не придёт в движение ни при каком значении силы F. Тележка и стержень абсолютно твёрдые.





446. Абсолютно твёрдая доска длиной L и массой m шарнирно закреплена в точке A, образует угол α с горизонтом и опирается на абсолютно твёрдый цилиндр радиуса R и массой M (рис. справа). На верхний конец доски B начинает действовать горизонтальная сила F, увеличивающаяся пропорционально времени: F = kt, где k – известный коэффициент. Доска и цилиндр однородные. Обозначим коэффициент трения между цилиндром и горизонтальной плоскостью за μ_1, а между цилиндром и доской – за μ_2.

1. Найдите условие, при котором цилиндр не придёт в движение никогда.
2. Найдите условие, при котором цилиндр придёт в движение, прокручиваясь по часовой стрелке (относительно рисунка). В какой момент времени это произойдёт?
2. Найдите условие, при котором цилиндр придёт в движение, прокручиваясь против часовой стрелки. В какой момент времени это произойдёт?

Подсказки

1. [1] Используйте формулу-определение скорости.

2. [2] Задача состоит из трёх частей. Для решения первой части нужно применить формулу-определение скорости, а для двух других частей – следствия из неё (выражения для пути и времени).

3. [3] Сначала нужно найти (или выразить через данные задачи) время, через которое они встретятся. После этого путь найти легко.

4. [1] Вспомните определение пути и перемещения.
5. [1] Переведём все скорости в одну систему единиц, например в м/с. Скорость велосипедиста относительно земли равна 10 м/с. За одну секунду велосипедист 10 м, а ветер проходит 4 м. Расстояние между ними за секунду сокращается на 14 м, значит, скорость сближения равна $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = 14$ м/с. Это и есть скорость ветра относительно велосипедиста.
6. [2] Пусть ось x направлена на север, y – на восток, а z – вверх. Применяйте формулу для изменения координаты при равномерном движении.
7. [1] Вспомните определения равномерного движения и скорости.
8. [3] Обозначим за s длину эскалатора (она неизвестна и найти её нельзя, но она должна сократиться), за t – время, которое нужно найти, за υ_1 и υ_2 – скорости эскалатора относительно земли и человека относительно эскалатора. Тогда можно записать: $t = \dfrac{s}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$, $\upsilon_1 = \dfrac{s}{t_1}$, $\upsilon_2 = \dfrac{s}{t_2}$. Подставляя υ_1 и υ_2 в первую формулу, получим: $t = \dfrac{s}{\dfrac{s}{t_1} + \dfrac{s}{t_2}} = \ldots$ (выполните алгебраические преобразования и досчитайте сами).
9. [3] Обозначим за s путь, пройденный мотоциклистом, а за t – время движения. По формуле (2), $\upsilon_{\text{ср}} = \dfrac{s}{t}$. $t = t_1 + t_2 = \dfrac{0{,}5s}{\upsilon_1} + \dfrac{0{,}5s}{\upsilon_2} = \dfrac{0{,}5s(\upsilon_2 + \upsilon_1)}{\upsilon_1 \upsilon_2}$. Подставьте t в первую формулу. s сократится.
10. [3] Обозначим за s путь, пройденный автомобилем, а за t – время движения. По формуле (2), $\upsilon_{\text{ср}} = \dfrac{s}{t}$. $s = s_1 + s_2 = 0{,}5t \cdot \upsilon_1 + 0{,}5t \cdot \upsilon_2$. Подставьте s в первую формулу. t сократится. В этой задаче, в отличие от предыдущей, средняя скорость равна среднему арифметическому скоростей: $\upsilon_{\text{ср}} = \dfrac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}$.
11. [2] Скорости лодки относительно земли в случае движения по течению и против течения равны $\upsilon_{по} = \upsilon_2 + \upsilon_1 = 6$ м/с, $\upsilon_{против} = \upsilon_2 - \upsilon_1 = 4$ м/с. Время движения по реке $t_p = t_1 + t_2 = \dfrac{s}{\upsilon_{по}} + \dfrac{s}{\upsilon_{против}} = 125$ с. Время движения по озеру вы сами легко посчитаете, и оно будет равно 120 с. То есть, время движения по реке больше, чем по озеру. Можно доказать, что время движения по реке туда и обратно в любом случае будет больше, чем время движения по озеру. Для этого выполним алгебраические действия:

$$t_p = \frac{s}{\upsilon_{по}} + \frac{s}{\upsilon_{против}} = \frac{s}{\upsilon_2 + \upsilon_1} + \frac{s}{\upsilon_2 - \upsilon_1} = \frac{s(\upsilon_2 - \upsilon_1) + s(\upsilon_2 + \upsilon_1)}{(\upsilon_2 + \upsilon_1)(\upsilon_2 - \upsilon_1)} = \frac{2s\upsilon_2}{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2} = \frac{2s}{\upsilon_2 - \dfrac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2}} > \frac{2s}{\upsilon_2} = t_{оз}.$$

(здесь мы учли то, что из двух дробей с одинаковым числителем больше та, знаменатель которой меньше).
12. [3] Есть 2 способа решения. **Первый способ.** Рассмотрим движение лодки относительно воды. Лодку и плот разделяет расстояние S = 12 км. Лодка пройдёт это расстояние, т.е. догонит плот за время $t_1 = \dfrac{S}{V} = \dfrac{4}{3}$ часа. Плот за это время пройдёт относительно земли расстояние $S_1 = t_1 V_{теч}$, где $V_{теч}$ – скорость течения. Скорость течения равна $V_{теч} = \dfrac{S}{t} = 4$ км/ч. Значит, $S_1 = t_1 V_{теч} = 5\dfrac{1}{3}$ км. Тогда общее расстояние, на которое плот уплывёт от причала, равно $S_{общ} = S + S_1 = 17\dfrac{1}{3}$ км ≈ 17,33 км.

Второй способ. Рассматриваем движение относительно земли. Найдём сразу скорость течения: $V_{теч} = \dfrac{S}{t} = 4$ км/ч. Теперь учтём, что к моменту встречи лодка и плот пройдут одинаковый путь $S_{общ}$, но за разное время. Пусть t_1 – время от момента выхода лодки до её встречи с плотом.
С одной стороны, $S_{общ} = (V + V_{теч})t_1$. В скобках стоит скорость лодки относительно земли.
С другой стороны, $S_{общ} = V_{теч}(t + t_1)$. В скобках – время движения плота.
Приравняем правые части:

$(V + V_{теч})t_1 = V_{теч}(t + t_1)$;
$Vt_1 + V_{теч}t_1 = V_{теч}t + V_{теч}t_1$;
$Vt_1 = V_{теч}t$; отсюда выражаем t_1:
$t_1 = \frac{V_{теч}}{V}t = \frac{4}{3}$ часа.
Тогда $S_{общ} = (V + V_{теч})t_1 \approx 17{,}33$ км.

13. [3] Эта задача иллюстрирует знаменитую апорию Зенона (древнегреческий философ): чтобы догнать черепаху, Ахилл должен пробежать бесконечное число отрезков (сначала 10 м, потом 1 м, потом 0,1 м и так далее). Поэтому догнать черепаху как будто бы невозможно (и вообще движение невозможно). Но на самом деле сумма длин бесконечного числа отрезков может равняться конечному числу. В данной задаче получается бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Вы можете подсчитать её сумму, а можете действовать по аналогии с предыдущей задачей.

14. [4] Есть 2 способа решения этой задачи. **Первый способ.** Обозначим за s путь, пройденный под дождём. Разность Δt реального и запланированного времени возникает на участке пути s. Запишем разность времён в соответствии с формулой (4):

$$\Delta t = t_{реал} - t_{запл} = \frac{s}{\upsilon_2} - \frac{s}{\upsilon_1} = \frac{s(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{\upsilon_1\upsilon_2}.$$

С другой стороны, по формуле (3), $s = \upsilon_2 t$, где t – время дождя. Подставляя вторую формулу в первую, имеем: $\Delta t = \frac{\upsilon_2 t(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{\upsilon_1\upsilon_2} = \frac{t(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{\upsilon_1}$. Теперь из равенства $\Delta t = \frac{t(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{\upsilon_1}$ нужно алгебраическими действиями выразить время дождя t. Для этого нужно сначала умножить обе части равенства на υ_1 и сократить υ_1 в правой части, а потом разделить обе части полученного равенства на $(\upsilon_1 - \upsilon_2)$.

Получится формула $t = \frac{\upsilon_1 \Delta t}{(\upsilon_1 - \upsilon_2)}$.

Второй способ. Сделать рисунок. К – Константиново, R – Рязань, AB – участок, который автобус проехал под дождём за время t, которое нужно найти. AC – участок, который проехал бы автобус за время t, если бы не было дождя.

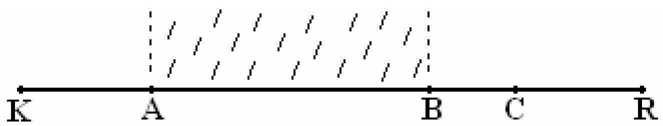


Рис. 4

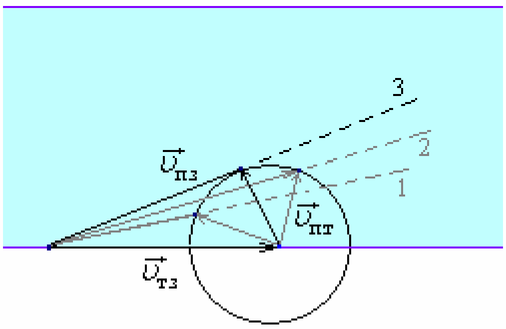
BC = AC – AB = $t(\upsilon_1 - \upsilon_2)$. С другой стороны, автобус прошёл путь KA + AB + CR за то же время, за какое было запланировано пройти весь путь KR. Значит, BC = $\upsilon_1\Delta t$. Сравнивая полученные выражения, видим: $t(\upsilon_1 - \upsilon_2) = \upsilon_1\Delta t$.

15. [4] Обозначим за S_2 путь, пройденный под дождём. Равенство запланированного и реального времени прибытия запишется в виде $\frac{S_1}{\upsilon_2} + \frac{S}{\upsilon_3} = \frac{S_1 + S}{\upsilon_1}$. Отсюда выразим S_1. Разобьём дробь в правой части на две дроби и перенесём в левую часть всё, что содержит S_1, а в правую часть всё, что не содержит S_1. Получим: $\frac{S_1}{\upsilon_2} - \frac{S_1}{\upsilon_1} = \frac{S}{\upsilon_1} - \frac{S}{\upsilon_3}$. Теперь приведём дроби к общему знаменателю:

$\frac{S_1(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{\upsilon_1\upsilon_2} = \frac{S(\upsilon_3 - \upsilon_1)}{\upsilon_1\upsilon_3}$. υ_1 сокращается. Умножим обе части равенства на υ_2, а потом разделим обе части на $(\upsilon_1 - \upsilon_2)$. Получим: $S_1 = \frac{S\upsilon_2(\upsilon_3 - \upsilon_1)}{\upsilon_3(\upsilon_1 - \upsilon_2)}$.

С другой стороны, $S_1 = \upsilon_2 t$, где t – время дождя. Приравнивая правые части полученных формул и сокращая υ_2, получим: $t = \frac{S(\upsilon_3 - \upsilon_1)}{\upsilon_3(\upsilon_1 - \upsilon_2)} = \ldots$ (досчитайте сами).

Средняя скорость равна 70 км/ч. Ведь, по условию задачи, двигаясь с такой скоростью, автобусы были бы в пути такое же время, какое были на самом деле.
16. [2] Введите скорость течения, скорость лодки относительно воды, а также путь S в одну сторону. Эти величины найти нельзя, но при решении они сократятся.
17. [2] Движение вагона и движение пули внутри вагона связаны одним и тем же временем.
18. [2] За время переезда каждая точка проходит путь, равный сумме длин моста и поезда.
19. [3] Пользуйтесь определением средней скорости и отношениями отрезков пути и времени.
20. [4] Длины и отрезки времени в задаче неизвестны, и найти их нельзя. Запишите определение средней скорости в виде большой дроби. Используйте все возможные соотношения пути, скорости и времени, чтобы свести неизвестные величины к какой-то одной и сократить её.
21. [4] Рассмотрите два различных момента времени. Пусть они разделены промежутком t. Найдите перемещение точки O за это время, и разделите на t. Воспользуйтесь теоремой косинусов.
22. [2] Используйте закон сложения скоростей и теорему Пифагора.
23. [2] Перейдите в систему отсчёта, связанную с поездом.
24. [4] Нужно найти математическую формулировку понятия «качение без проскальзывания». Одна из возможных формулировок такова: длина участка земли, пройденного бочкой за один оборот, равна длине окружности бочки. Далее, рассмотрим две системы отсчёта: одну, связанную с землёй, и другую, с началом координат в центре бочки, движущуюся относительно земли поступательно. Применим закон сложения скоростей. В итоге получим, что скорость нижней точки относительно земли равна нулю. Это вторая возможная формулировка «качения без проскальзывания», хотя не столь очевидная.
25. [3] Перейдите в систему отсчёта, связанную с пароходом.
26. [3] Очевидно, что если скорость пловца относительно воды больше скорости течения, то он может переплыть реку так, чтобы его вообще не снесло. С учётом этого применяйте закон сложения скоростей.
27. [3] Применяйте формулу-определение скорости и закон сложения скоростей.
28. [5] Если скорость пловца меньше скорости реки, то переплыть реку совсем без сноса (как в задаче 26) нельзя. Будем искать оптимальный угол из геометрических соображений. Построим вектор $\vec{\upsilon}_{\text{т.з}}$ – скорость течения относительно земли. Вектор скорости пловца относительно течения не фиксирован. Но построим окружность с радиусом, равным этому вектору, и с центром в конце $\vec{\upsilon}_{\text{т.з}}$.

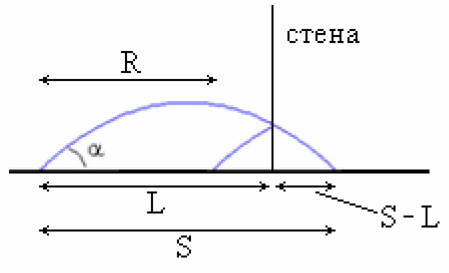


Множество точек окружности даёт все возможные направления вектора скорости пловца относительно течения $\vec{\upsilon}_{\text{п.т}}$. Закон сложения скоростей даёт все возможные направления скорости пловца относительно земли $\vec{\upsilon}_{\text{п.з}}$. Из них наиболее оптимальным является направление 3, когда вектор $\vec{\upsilon}_{\text{п.з}}$ направлен по касательной к окружности (то есть, перпендикулярен вектору $\vec{\upsilon}_{\text{п.т}}$).
29. [3] Применяйте закон сложения скоростей.
30. [2] Применяйте закон сложения скоростей и теорему Пифагора.
31. [3] Применяйте закон сложения скоростей.
32. [3] Применяйте закон сложения скоростей. Можно для удобства перейти в систему отсчёта, связанную с автомобилем.
33. [4] Рассмотрите две системы отсчёта: одну, связанную с землёй, и другую, с началом координат в центре бочки, движущуюся относительно земли поступательно. Применяйте закон сложения скоростей.

34. [6] Расстояние между автомобилями в момент, когда один из них проезжает перекрёсток, не является минимальным, как это может показаться на первый взгляд. Чтобы найти минимальное расстояние, нужно перейти в систему отсчёта, связанную с одним из автомобилей. Минимальным расстоянием будет длина перпендикуляра, соединяющего данный автомобиль с линией движения другого автомобиля в этой системе отсчёта. Можно также воспользоваться поиском минимума с помощью производной.
35. [6] Из соображений симметрии ясно, что в каждый момент времени три черепахи образуют равносторонний треугольник. Поэтому можно найти скорость, с которой уменьшается расстояние между черепахами (эта скорость постоянна, но не равна υ). Для этого нужно рассмотреть *мгновенную ось* координат, связанную с землёй, параллельную одному из отрезков между черепахами в некоторый момент времени. Находя проекции скоростей черепах на эту ось, можно вычислить «скорость сближения» черепах. И она будет одинаковой в любой момент времени.
36. [6] Нужно воспользоваться тем, что скорость всегда направлена по касательной к траектории.
37. [6] Границей области, в которой звук слышен, является поверхность конуса. Чтобы её найти, можно перейти в систему отсчёта, связанную с самолётом, и действовать так же, как в задаче 28.
38. [2] Пользуйтесь формулами для скорости и изменения координаты (или перемещения) при равноускоренном движении.
39. [2] Выразите время из формулы для скорости при равноускоренном движении.
40. [2] Выразите время из формулы для перемещения при равноускоренном движении.
41. [3] Путь, пройденный за пятую секунду – это путь, пройденный за первые пять секунд, минус путь, пройденный за первые четыре секунды.
42. [2] Пользуйтесь определением ускорения.
43. [3] На различных отрезках времени тело движется либо равноускоренно, либо равномерно. Применяйте формулы, описывающие эти виды движения. Не забывайте о начальных условиях (x_0, υ_0) на каждом участке. Учёт начальных условий приводит к тому, что функция $S_x(t)$ должна быть непрерывной.
44. [3] Легче всего воспользоваться формулой, выражающей S_x через две скорости и время.
45. [3] Легче всего воспользоваться формулой, выражающей S_x через две скорости и ускорение.
46. [3] При графическом решении нужно учесть, что перемещение равно площади под графиком скорости от времени. При аналитическом решении нужно пользоваться формулами для равномерного и равноускоренного движения.
47. [4] Легче всего воспользоваться формулой, выражающей S_x через две скорости и ускорение.
48. [3] Пользуйтесь формулами для скорости и изменения координаты при равноускоренном движении. Сведите задачу к системе двух уравнений.
49. [3] Сравните закон движения с формулой для координаты при равноускоренном движении. По теореме о совпадающих многочленах, коэффициенты при одинаковых степенях t в этих выражениях равны.
50. [3] Легче всего воспользоваться формулой, выражающей S_x через две скорости и ускорение.
51. [3] Пользуйтесь формулами для скорости и изменения координаты при равноускоренном движении. Сведите задачу к системе двух уравнений.
52. [3] Обозначьте весь путь за h. Разность времён прохождения путей h и h – S равна t.
53. [4] Время t состоит из двух частей: время подъёма ракеты и время движения звука вниз. Выразите эти времена через входные данные задачи и составьте их сумму. Сведите задачу к квадратному уравнению.
54. [4] При ответе на первый вопрос пользуйтесь формулой для координаты при равноускоренном движении (как в задаче 52). При ответе на второй вопрос пользуйтесь законом сложения скоростей и формулой для скорости при равноускоренном движении.
55. [4] Предположите, что движение является равноускоренным, и найдите отношение времён прохождения первого и второго вагонов. Сравните это с тем, что дано в действительности.
56. [3] Пользуйтесь определением средней скорости и формулой для перемещения (или координаты) при равноускоренном движении.
57. [2] Пользуйтесь формулой для перемещения (или координаты) при равноускоренном движении.
58. [4] Получите выражение для пути, пройденного за n-ную секунду. Это разность путей, пройденных за n секунд и за n-1 секунд. Пользуйтесь этим выражением.

59. [3] Сначала выразите из данных задачи начальную скорость. Зная начальную скорость, найдите время остановки через формулу для скорости при равноускоренном движении.
60. [3] Обозначьте весь путь за 3S. Время прохождения последней трети пути равно разности времён прохождения путей 3S и 2S.
61. [2] Пользуйтесь формулами для координаты (или пути) при равномерном и равноускоренном движении. Приравняйте координаты (пути) тел.
62. [4] Сначала выразите время падения. Разделите его на две части. Дальше решение очевидно.
63. [4] Пользуйтесь формулами для пути и перемещения при равноускоренном движении. Учтите, что пройденный путь, в отличие от координаты, никогда не убывает. Когда убывает координата, путь с такой же скоростью возрастает.
64. [4] Можно перейти в систему отсчёта, связанную с зайцем, и вычислить путь, который пройдёт волк, прежде чем его скорость в этой системе отсчёта обратится в ноль. Можно работать в земной системе отсчёта и вычислить путь, пройденный волком до момента, когда его скорость сравнялась со скоростью зайца.
65. [5] Сначала нужно выяснить, изменил ли снежок направление движения за время t. Для этого нужно сравнить путь S и путь, пройденный при подъёме до остановки за время t. Путь, пройденный при подъёме, равен пути, пройденному при свободном падении за такое же время. Это следует из соображений симметрии или из того, что подъём можно записать на видеоплёнку и прокрутить плёнку назад (модель обращения времени).
66. [4] Нужно учесть, что тело за время t изменило направление движения, и что путь никогда не убывает.
67. [6] Это задача на поиск минимума. Минимум некоторой функции (скорости или времени, за которое мальчик догонит дверь) можно искать несколькими способами.
1. С помощью производной. Это самый стандартный способ, но далеко не единственный.
2. Свести функцию к такой функции, минимум которой известен. Например, выразив скорость как $\upsilon = \frac{S}{t} + \frac{at}{2}$, можно сделать замену переменной *t*: $t = x\sqrt{\frac{2S}{a}}$. Тогда $\upsilon = \sqrt{\frac{aS}{2}}\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Известно (легко показать с помощью квадратного уравнения), что минимум функции $x + \frac{1}{x}$ равен 2.
3. Уравнение $\upsilon \cdot t = S + \frac{at^2}{2}$ является квадратным относительно времени. Решая его, мы вычисляем дискриминант. Воспользуемся тем, что дискриминант должен быть неотрицательным. Очевидно, что время минимально, когда дискриминант равен нулю (иначе при данной скорости υ существуют два решения).
4. Из физических соображений ясно, что если скорость υ минимальна, то она равна скорости поезда в момент, когда мальчик догонит дверь. В противном случае мальчик либо не догонит дверь, либо обгонит, и тогда эта скорость не будет минимальной.
5. Аналогично из математических соображений ясно, что графики зависимости координат мальчика и поезда от времени должны пересекаться ровно в одной точке. То есть, прямая зависимости координаты мальчика от времени должна быть касательной к параболе – зависимости координаты поезда от времени.
6. Можно перейти в систему отсчёта, связанную с поездом. Тогда зависимость координаты мальчика от времени является квадратичной функцией, и её максимум хорошо известен (координата вершины параболы).
68. [2] Пусть ось x направлена горизонтально (над обрывом), а ось y – вверх или вниз. Применяйте формулы из параграфа 7.
69. [3] Сначала выразите время падения с высоты h, а затем найдите, на какое расстояние по горизонтальной оси уйдёт тело за это время.
70. [3] Найдите отдельно горизонтальную и вертикальную проекции скорости спустя время t. Чтобы найти модуль скорости, используйте теорему Пифагора. Чтобы найти, под каким углом к горизонту направлена скорость, пользуйтесь определением тангенса угла.

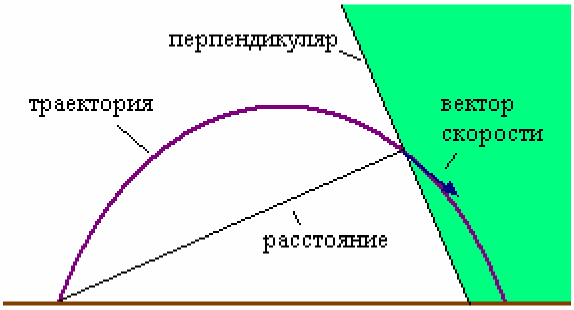
71. [4] Рассматривайте отдельно горизонтальную и вертикальную составляющие скорости. Чтобы найти зависимость вертикальной составляющей от высоты, используйте формулу, выражающую S_x через две скорости и ускорение. Далее – теорема Пифагора.
72. [3] Пользуйтесь стандартными формулами из параграфа 7. Скорость в верхней точке траектории направлена горизонтально и равна своей проекции на ось x.
73. [3] Пользуйтесь формулами для высоты подъёма и дальности полёта.
74. [3] Это задача на поиск максимума функции $l(2\alpha)$. Максимум синуса на сегменте $[0; \pi]$, а также угол, при котором синус максимален, хорошо известен.
75. [3] Сначала найдите время полёта пули до мишени, а потом найдите, на сколько пуля сместится вниз за это время.
76. [3] Применяя формулу (21) для координаты y, можно получить квадратное уравнение относительно времени полёта. Зная время полёта, легко найти горизонтальную координату.
77. [4] Зная максимальную высоту подъёма и угол α, можно вычислить начальную скорость. А зная начальную скорость и дальность полёта по горизонтали, можно вычислить время полёта.
78. [4] Можно либо воспользоваться готовым уравнением траектории, либо собрать его «по частям» из формул параграфа 7.
79. [5] Рассмотрим малую порцию воды, вылетающую из шланга, и найдём время её полёта до земли. За это время из трубы вытечет некоторая масса воды. Это и будет масса воды в воздухе. Объём воды, вытекающий из трубы за время t со скоростью υ, равен площади сечения трубы, умноженной на υt. Масса равна объёму, умноженному на плотность.
80. [4] Воспользуйтесь уравнением траектории или соберите его «по частям» из формул (20) и (21) для координат x и y. Сведите задачу к квадратному уравнению относительно $tg\alpha$, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством.
81. [5] Представим себе траекторию мяча в случае, если бы стены не было, и заметим, что стена отражает кусок этой траектории, как зеркало. Тогда легко найти расстояние R.



$$R = L - (S - L) = 2L - S$$

Если быть точнее, то заранее не известно, где приземлится мяч: перед мальчиком или за мальчиком (если он попадёт в стену на восходящем участке траектории). Поэтому в ответе к задаче стоит модуль.
82. [6] Если вы уже изучили производные, то легче всего найти зависимость координаты тени от времени и воспользоваться тем, что скорость равна производной координаты. Если не пользоваться производными, то нужно рассматривать проекции скорости кузнечика и тени на ось, перпендикулярную солнечным лучам, и учесть, что эти проекции равны.
83. [4] При решении задачи можно выбрать систему координат двумя способами: либо ось x горизонтальна, либо направлена вдоль склона горы. В первом случае нужно находить координату точки пересечения траектории со склоном горы, а во втором – дальность полёта с учётом направления ускорения свободного падения под углом к обеим осям.
84. [4] Нужно рассматривать движение проекции апельсина на вертикальную ось. Полезно воспользоваться тем, что время подъёма равно времени спуска.
85. [4] Воспользуйтесь уравнением траектории.
86. [5] По сути это задача на уравнение траектории. Но при решении удобно не вводить угол, под которым прыгнула лягушка, а работать с проекциями.
87. [5] Пользуйтесь уравнением траектории.
88. [6] При абсолютно упругом ударе угол падения равен углу отражения. Найдите модуль и направление скорости шарика после удара, а дальше действуйте по аналогии с задачей 83.

89. [4] Если знать высоту, на которой разорвался снаряд, то легко найти время падения осколка, полетевшего горизонтально. Высоту можно выразить через t_1 и t_2.
90. [5] Время полёта камня находится из квадратного уравнения (21). Далее можно перейти в систему отсчёта, связанную с поездом, а можно работать в земной системе отсчёта. В замной системе отсчёта начальная скорость камня направлена под углом, отличным от α. При решении не вводите новый угол, а работайте с проекциями.
91. [5] Это задача на поиск максимума. Выразите высоту как функцию от cosα. Это будет квадратичная функция. Можно воспользоваться формулой для координат вершины параболы.
92. [5] Найдите условие, при которой уравнение траектории (параболы) и уравнение окружности имеют одну общую точку.
93. [7] Нужно найти удобное математическое выражение того факта, что камень удаляется от точки бросания. На рисунке показано геометрическое выражение этого факта: вектор скорости камня направлен внутрь заштрихованной области. В противном случае камень приближается к точке бросания.



94. [1] Пользуйтесь формулой для центростремительного ускорения.
95. [2] Выразите радиус из формулы для центростремительного ускорения.
96. [2] Выразите скорость из формулы для центростремительного ускорения.
97. [1] Учтите, что при движении по окружности направление ускорения меняется.
98. [3] Найдите период обращения самолёта и выразите искомую скорость через период и радиус. Затем выразите скорость из формулы для центростремительного ускорения и приравняйте полученные выражения.
99. [3] Задача аналогична предыдущей, только найти нужно другую величину.
100. [3] Выразите радиус через скорость и период и воспользуйтесь формулой для центростремительного ускорения.
101. [2] Пользуйтесь выражением для угловой скорости.
102. [2] Пользуйтесь формулой для центростремительного ускорения.
103. [3] Пользуйтесь формулой для центростремительного ускорения и связью скорости, периода и радиуса.
104. [3] Выразите отношение угловых скоростей через отношение периодов.
105. [3] Выразите скорость через период и радиус. Выразите скорость через радиус и угловую скорость. Приравняйте полученные выражения.
106. [5] Нужно разложить вектор ускорения свободного падения на тангенциальную и нормальную составляющие, как описано в конце параграфа 9. Нормальная составляющая равна центростремительному ускорению в данной точке траектории. Из формулы для центростремительного ускорения выражайте радиус.
107. [3] Перейдите в систему отсчёта, жёстко связанную с одной из стрелок.
108. [3] Сначала найдите зависимость координат от угла поворота радиус-вектора шарика, а потом – зависимость угла поворота от времени.
109. [1] Пользуйтесь вторым законом Ньютона.
110. [2] Выразите массу из второго закона Ньютона.
111. [3] Найдите ускорение по одной из формул для S_x. Зная ускорение, найдите силу.
112. [3] В данной задаче ускорение груза равно нулю. Это значит, что векторная сумма всех сил, действующих на груз, тоже равна нулю. То есть, сила, с которой кран действует на груз, равна по модулю и противоположна по направлению силе тяжести.
113. [3] Запишите второй закон Ньютона и его проекцию на вертикальную ось.

114. [3] Для начала сделаем важный вывод: *сила натяжения верёвки или троса во всех точках одинакова, если верёвка или трос не встречает сопротивления своему движению (трения) и массой верёвки или троса можно пренебречь*. Откуда это следует? Рассмотрим сколь угодно малый участок верёвки. Этот участок движется так, что векторная сумма всех действующих на него сил равна нулю. Действительно, $\vec{F} = m\vec{a}$, m = 0, => $\vec{F} = 0$. Но так как участок сколь угодно малый, то его можно считать прямым. А отсюда следует, что силы натяжения, действующие на концы этого участка, равны друг другу.

Далее используем стандартный алгоритм решения задач по динамике.

1. Делаем рисунок. Изображаем все силы, действующие на тело.
2. Записываем второй закон Ньютона (вместо $\vec{F}$ пишем сумму всех сил, действующих на тело).
3. Вводим систему координат. Записываем проекции второго закона Ньютона на координатные оси.
4. Учитываем кинематические связи (в данной задаче ускорения грузов равны по модулю), а также известные выражения для сил (в данной задаче известно выражение для силы тяжести).
5. Получается система уравнений, из которой находим нужные нам величины. Иногда достаточно записать проекцию второго закона Ньютона на одну координатную ось, как в этой задаче.

115. [3] Пользуйтесь алгоритмом, данным в подсказке к предыдущей задаче.

116. [3] Пользуйтесь стандартным алгоритмом (см. подсказку к задаче 114).

117. [3] Пользуйтесь стандартным алгоритмом (см. подсказку к задаче 114).

118. [2] Применяйте второй закон Ньютона и формулу для скорости при равноускоренном движении.

119. [2] Применяйте второй закон Ньютона и теорему Пифагора.

120. [3] Применяйте второй закон Ньютона и теорему косинусов.

121. [2] Применяйте второй и третий законы Ньютона.

122. [3] Применяйте второй и третий законы Ньютона и закон сложения ускорений, аналогичный закону сложения скоростей.

123. [2] Учтите третий закон Ньютона, а также то, что сила натяжения верёвки во всех точках одинакова.

124. [4] Так как максимальное усилие одной из команд больше, то другая команда придёт в движение с ускорением. При этом сила натяжения каната уже не определяется её усилием, а определяется усилием более сильной команды.

125. [3] Пользуйтесь стандартным алгоритмом (см. подсказку к задаче 114) в системе отсчёта, связанной с землёй.

126. [3] Задача аналогична предыдущей.

127. [3] Система отсчёта, связанная с транспортом, не является инерциальной, поэтому второй закон Ньютона в ней не выполняется. Чтобы объяснить, почему при разгоне или торможении транспорта пассажиров отбрасывает, нужно рассмотреть движение в земной системе отсчёта. Пусть, например, автобус, двигавшийся равномерно с некоторой скоростью V, начал тормозить. Скорость автобуса относительно земли уменьшается, но пассажир по инерции продолжает двигаться вперёд со скоростью V. Поэтому ему кажется, что его отбрасывает вперёд. Чтобы его не отбрасывало, на него должны действовать силы (со стороны поручней, сиденья или пола), сообщающие ему такое же ускорение, с каким движется автобус.

128. [3] Пользуйтесь стандартным алгоритмом (см. подсказку к задаче 114) в системе отсчёта, связанной с землёй. Система отсчёта, связанная с ракетой, неинерциальная.

129. [3] Учтите, что автомобиль движется с центростремительным ускорением. С учётом этого записывайте второй закон Ньютона.

130. [3] Задача аналогична предыдущей.

131. [3] Верхняя точка мёртвой петли проходится самолётом в «перевёрнутом» положении. То есть, лётчик теоретически может выпасть из седла, если скорость самолёта будет недостаточной для того, чтобы центростремительное ускорение было не меньше ускорения свободного падения.

132. [3] Примените второй закон Ньютона для двух случаев: самолёт движется равномерно и самолёт входит в мёртвую петлю. Выразите вес лётчика в обоих случаях и найдите отношение этих выражений.

133. [3] Утверждение, приведённое в задаче, нуждается в уточнении, т.к. не заданы начальные условия и не оговорены все силы, действующие на тело. Будем считать, что начальная скорость равна нулю и на тело действует единственная сила. Тогда для пути имеем выражение: $S = \frac{Ft^2}{2m}$. Масса входит в знаменатель в первой степени, а время в числитель – в квадрате. Сделайте вывод.

134. [3] Учтите, что автомобиль движется с центростремительным ускорением, и действуйте по стандартному алгоритму.

135. [3] При движении с первой космической скоростью ускорение свободного падения совпадает с центростремительным ускорением.

136. [2] Вспомните определение веса и учтите подсказку к предыдущей задаче.

137. [1] На чемодан действуют сила тяжести и сила реакции опоры. Они равны по модулю и противоположны по направлению. Иначе бы чемодан либо «падал сквозь пол», либо подлетал вверх.

138. [2] Под действием одного груза пружина растянулась на одно деление. Значит, цена деления соответствует силе тяжести, действующей на один груз. Используйте выражение для силы тяжести и закон Гука.

139. [2] Возьмите любую точку графика, считайте её координаты F и x и примените закон Гука, выразив оттуда k.

140. [2] Сила, с которой груз давит на подставку, равна силе реакции опоры. На груз, таким образом, действуют три силы: сила тяжести, сила упругости пружины и сила реакции опоры. Так как груз покоится, их равнодействующая равна нулю. Отсюда можно найти силу реакции опоры.

141. [3] Представим, что конструкцию растянули на величину x. На крюк со стороны первой пружины действует сила $F_1 = k_1 x$, а со стороны второй пружины – сила $F_2 = k_2 x$. Равнодействующая этих сил равна $F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x$. Из формулы (10) следует, что коэффициент жёсткости системы равен $k = \frac{F}{x} = \frac{k_1 x + k_2 x}{x} = \frac{(k_1 + k_2)x}{x} = k_1 + k_2$.

142. [4] Представим, что конструкцию растянули некоторой силой F. Так как нижняя пружина находится в равновесии, то на неё со стороны верхней пружины действует сила, тоже равная F (массу пружин не учитываем, как и в предыдущих задачах). Значит, обе пружины растянуты с силой, равной F. Удлинение системы равно сумме удлинений каждой из пружин: $x = x_1 + x_2$. Пусть k – коэффициент жёсткости системы. По формуле (9), $F = kx = k(x_1 + x_2)$. Теперь x_1 и x_2 нужно выразить через F, k_1 и k_2: $x_1 = \frac{F}{k_1}$, $x_2 = \frac{F}{k_2}$. Эти выражения подставим в предыдущую формулу, F сократится, и можно будет выразить из получившегося равенства k.

143. [2] Пользуйтесь стандартным алгоритмом (см. подсказку к задаче 114) и выражением для силы трения.

144. [2] Если ответ не ясен сразу, введите массу книги m и коэффициент трения μ и вычислите необходимую силу в первом и во втором случае.

145. [3] Пользуйтесь стандартным алгоритмом (см. подсказку к задаче 114). Ответ на первый вопрос ясен из наглядных соображений: подруга П1 тянет верёвку вверх, уменьшая силу прижатия санок к земле, а подруга П2 прижимает санки к земле.

146. [2] Сначала рассмотрите систему в целом и найдите её ускорение, а потом, применив ещё раз второй закон Ньютона, найдите силу.

147. [3] Задача, по сути, аналогична предыдущей плюс применение закона Гука.

148. [3] Задача аналогична задаче 146.

149. [2] Если ответ не ясен сразу (например, из аналогии с силой натяжения нити), то применяйте законы Ньютона для каждого динамометра.

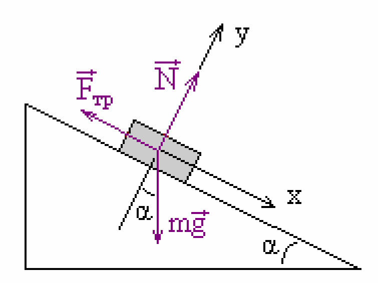
150. [3] Можно действовать разными способами. а.) найти минимальную силу, при которой учебник сдвинется, и сравнить её с данной силой; б.) предположить, что учебник сдвинется, и найти ускорение. Если оно окажется неположительным, значит, учебник не сдвинется.

151. [3] Задача аналогична предыдущей.

152. [3] Пользуйтесь стандартным алгоритмом (см. подсказку к задаче 114) и законом Гука.

153. [3] Пользуйтесь стандартным алгоритмом (см. подсказку к задаче 114), законом Гука и формулой для пути при равноускоренном движении.

154. [3] Учтите связь силы, приложенной к безмену, и массы, которую он показывает. Найдите силу и вычислите соответствующую её массу.
155. [6] Учтите, что система отсчёта, связанная с лифтом, неинерциальная. Нужно применять стандартный алгоритм, работая в системе отсчёта, связанной с землёй, а также закон сложения ускорений, который аналогичен закону сложения скоростей.
156. [3] Нужно применять стандартный алгоритм. Покажем, как это делается в задачах с наклонной плоскостью.
а.) Рисуем силы, действующие на тело.



б.) Пишем второй закон Ньютона: $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}=m\vec{a}$.

в.) Пишем проекции этого равенства на координатные оси.
Ox: $mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$.   (1)

Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$; $N = mg\cos\alpha$.

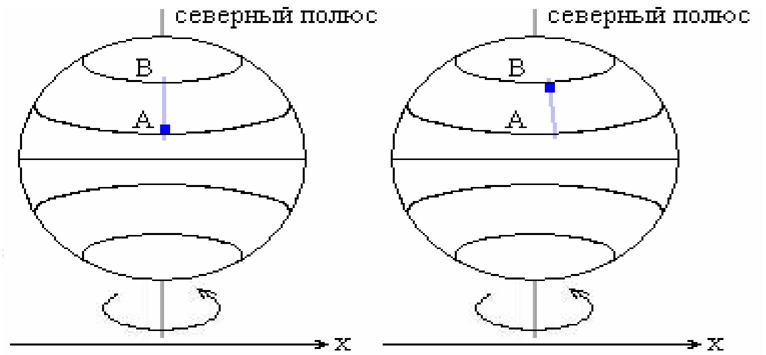
Выражение для силы трения скольжения: $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$.   (2)

г.) Находим нужную величину (ускорение) из системы уравнений (1)-(2). Получается:
$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.
157. [3] Найдите ускорение, как в предыдущей задаче. Зная ускорение, путь и начальную скорость, найдите время.
158. [3] Действуйте аналогично задаче 156. Только в этой задаче трение есть трение покоя, а не скольжения.
159. [3] Действуйте аналогично задаче 156.
160. [4] Для каждого из случаев надо определить, является ли трение трением покоя или скольжения.
161. [3] Работайте в системе отсчёта, связанной с землёй (система отсчёта, связанная с диском, неинерциальная). Рассмотрите момент, когда центр диска и предмет находятся в плоскости координат x и y. Учтите, что предмет движется с центростремительным ускорением.
162. [3] Действуйте аналогично предыдущей задаче.
163. [4] Действуйте по аналогии с предыдущей задачей, но учтите, что так как стержень жёсткий, то сила, действующая на груз со стороны стержня, направлена не вдоль него.
164. [3] Вектор суммы сил, действующих на велосипед со стороны земли, должен быть направлен вдоль велосипеда. Иначе велосипед опрокинется.
165. [3] Действуйте по стандартному алгоритму, учитывая, что груз движется с центростремительным ускорением.
166. [3] Действуйте по стандартному алгоритму.
167. [4] Чтобы доска оставалась неподвижной, действующая на неё сила трения должна быть направлена вверх. Тогда, по третьему закону Ньютона, сила трения, действующая на человека, должна быть направлена вниз. Значит, человек должен бежать вниз.
168. [4] *Коварна сила трения! Бывает покоя, а бывает скольжения.* Сначала между брусками действует сила трения покоя, и они движутся как одно целое. Но начиная с некоторого момента они «разлипаются» и начинают скользить относительно друг друга.
169. [1] Пользуйтесь законом всемирного тяготения.
170. [2] Пользуйтесь законом всемирного тяготения и вторым законом Ньютона.
171. [2] Пользуйтесь законом всемирного тяготения и учитывайте, что ускорение свободного падения в данном случае совпадает с центростремительным.
172. [2] Действуйте аналогично предыдущей задаче.
173. [2] Пользуйтесь законом всемирного тяготения и вторым законом Ньютона.

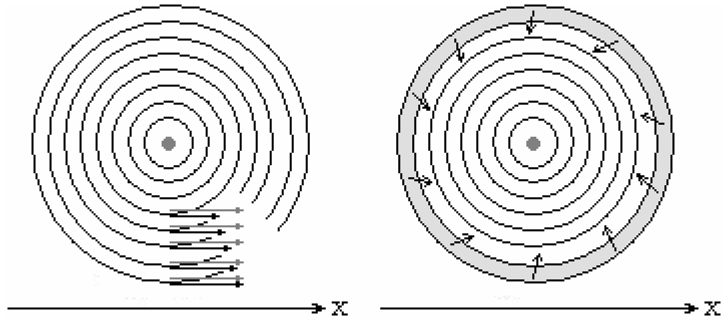
174. [2] Пользуйтесь законом всемирного тяготения и вторым законом Ньютона.
175. [2] Пользуйтесь законом всемирного тяготения и вторым законом Ньютона и учитывайте, что ускорение свободного падения в данном случае совпадает с центростремительным.
176. [3] Вычислите вес на экваторе с учётом вращения Земли и приравняйте его нулю. Работайте в системе Коперника.
177. [2] Можно воспользоваться найденным ранее выражением для космической скорости.
178. [3] Очевидно, что один из спутников движется в сторону вращения земли, а другой – против.
179. [4] Вычислите вес на полюсе и на экваторе с учётом вращения Земли. Работайте в системе Коперника.
180. [3] Сделайте рисунок и примените закон всемирного тяготения и второй закон Ньютона в системе Коперника.
181. [3] А от чего вообще зависит первая космическая скорость?
182. [4] Вычислите ускорение свободного падения на экваторе и на полюсе, работая в системе Коперника.
183. [3] Применяйте стандартный алгоритм решения задач по динамике с учётом того, что ускорение равно нулю.
184. [3] Для нахождения ускорения применяйте стандартный алгоритм. Для нахождения пути применяйте формулу (17).
185. [4] Ускорение находится аналогично предыдущей задаче. Для нахождения пути пользуйтесь формулами для перемещения и скорости при равноускоренном движении. Можно пользоваться только формулой для пути, если представить, что движение записано на видеоплёнку, и рассмотреть прокрутку плёнки назад.
186. [4] Учтите, что сила трения может быть направлена как вниз по наклонной плоскости, так и вверх.
187. [3] Лифт и предметы взаимодействуют силами отталкивания (вес и сила реакции опоры). Эти силы определяются деформациями предметов. Когда лифт начинает падать, деформации исчезают не сразу (не мгновенно). Поэтому предметы отталкиваются от пола лифта.
188. [5] Учтите, что система отсчёта, связанная с коробкой, неинерциальная. Нужно проводить все вычисления в земной системе отсчёта. Сила упругости пружины равна силе тяжести груза до пережигания нити и не изменяется мгновенно.
189. [3] Используйте стандартный алгоритм и не забывайте про третий закон Ньютона.
190. [4] Система отсчёта, связанная с доской, неинерциальная. Поэтому нужно проводить вычисления в земной системе отсчёта.
191. [4] Учтите, что сила трения может быть направлена как вниз по наклонной плоскости, так и вверх.
192. [4] Один из способов решения следующий. Допустим, что брусок движется по наклонной плоскости вниз, и найдём проекцию его ускорения на направленную в ту сторону ось. Если эта проекция отрицательна, значит, брусок на самом деле движется вверх. А для начала нужно выяснить, будет ли он вообще двигаться.
193. [5] Шайба может начать двигаться из-за вращения Земли. Земная система отсчёта не является инерциальной по сравнению с системой Коперника. Рассматривайте движение Земли относительно системы Коперника.
194. [5] *Коварна сила трения! Бывает покоя, а бывает скольжения.* Будем считать, что масса листа бумаги пренебрежимо мала по сравнению с массой груза (если это не так, то для ответа недостаточно данных). Тогда, по II закону Ньютона, лист бумаги движется так, что векторная сумма всех действующих на него сил равна нулю. Действительно, $\vec{F} = m\vec{a}$, m = 0, => $\vec{F} = 0$.
Силой тяжести листа можно пренебречь, поэтому силы трения, действующие на него со стороны бруска и наклонной плоскости, равны по модулю. При разных μ_1 и μ_2 это означает, что одна из сил – сила трения скольжения, а другая – сила трения покоя. В первом случае лист неподвижен, а во втором – движется вместе с бруском.
195. [5] Нужно найти удобное математическое выражение того факта, что снежок попал в мальчика. Введите систему координат (можно направить ось x вдоль горки, а можно горизонтально). Попадание снежка в мальчика означает, спустя некоторое время после старта координаты (x и y) снежка и мальчика попарно совпадают.

196. [3] Задача решается по стандартному алгоритму решения задач по динамике (или статике, поскольку ускорение равно нулю) с использованием выражения для силы Архимеда.
197. [3] Задача решается по стандартному алгоритму с учётом силы тяжести, действующей на гелий.
198. [3] Снова применяйте стандартный алгоритм решения задач по динамике. При ответе на второй вопрос учтите, что с возрастанием скорости возрастает сила сопротивления среды.
199. [4] Движение шара с постоянной скоростью означает, что векторная сумма всех действующих на него сил равна нулю. Сила сопротивления среды при спуске и подъёме одинакова по модулю, т.к. по условию задачи, скорость одинакова. Но направлена она всегда против движения.
200. [5] При погружении груза в воду сила давления на правую чашу уменьшится на силу Архимеда, действующую на груз. По третьему закону Ньютона, на воду со стороны груза действует сила, равная по модулю силе Архимеда. Поэтому равновесие нарушится. Чтобы компенсировать две эти силы, вес груза должен быть вдвое больше силы Архимеда.
201. [6] Пользуйтесь тем же приёмом, что применяется в параграфе 17 при выводе формулы для силы Архимеда. Рассмотрите мысленно выделенный объём жидкости и запишите для него второй закон Ньютона в инерциальной системе отсчёта (в той, в которой жидкость движется с ускорением). Из него легко найти силу, действующую на выделенный объём со стороны окружающей жидкости. Это и будет сила Архимеда, поскольку если на место выделенного объёма жидкости поместить любое тело, то эта сила не изменится.
202. [6] Рассматривайте движение в земной системе отсчёта, поскольку связанная с вагоном – неинерциальная. Используйте формулу для обобщённой силы Архимеда (см. предыдущую задачу).
203. [5] Вспомните, что силы трения направлены против движения. Если автомобиль стоит на месте, то при попытке столкнуть его вбок возникает сила трения, направленная против сталкивающей силы. Однако при быстром вращении колёс сила трения направлена против вращения, и её проекция на направление сталкивающей силы мала, поэтому буксующий автомобиль гораздо легче столкнуть вбок (если, конечно, колёса не находятся в колее).

204. [5]



а.) Точки Земли на широте А движутся с большей скоростью, чем на широте В (на широте А расстояние до оси вращения больше). Рассмотрим некоторую массу воды в реке (она обозначена квадратиком). При течении воды вдоль меридиана к полюсу проекция скорости воды на ось x системы Коперника уменьшается. Это значит, что вода движется с ускорением, направленным влево (противоположно оси x). Согласно второму закону Ньютона, на воду действует сила, направленная влево. По третьему закону Ньютона, вода действует на берег силой, направленной вправо. При течении вдоль параллели эффекта совсем не возникает. В южном полушарии вода больше размывает левый берег.



б.) Рассмотрим стекание воды на северном полюсе (вид сверху). Точки Земли, находящиеся дальше от полюса, движутся в системе Коперника быстрее, чем точки вблизи полюса (скорость показана чёрными стрелками, рис. слева). Первые порции воды, подтекающие к полюсу, не меняют проекции своей скорости на ось x (серые стрелки). В результате относительно Земли порции воды начинают закручиваться против часовой стрелки. Далее эффект усиливается силой тяжести. Порции воды, приближаясь к полюсу, стекают вниз, в отверстие. Крайний, выделенный слой воды (рис. справа) находится выше внутренних. Внутренний слой тянет внешний (взаимодействие молекул). Справа показаны проекции на плоскость рисунка сил, действующих на внешний слой со стороны внутреннего. Эти силы закручивают внешний слой.

В южном полушарии воронка закручивается по часовой стрелке. Если трудно представить разницу между северным и южным полюсом – раскрутите глобус и посмотрите на него снизу.

В ряде случаев закручивание воронки вызывается неровностями поверхности.

205. [5] Иногда по ошибке рассуждают так: пока тело падает, Земля успевает чуть-чуть провернуться на Восток, и поэтому получается, что тело отклоняется к западу от вертикали. Это неверно. Рассмотрим движение в системе Коперника. Пусть тело до падения удерживают в точке A, а вертикаль, опущенная из A, пересекает поверхность в Земли точке B. Так как точка A находится дальше от оси вращения Земли, чем B, то её скорость в системе Коперника больше. Это значит, что тело при падении не «отстаёт от Земли», а «обгоняет Землю». Падающее тело смещается на восток от вертикали. Чтобы найти смещение, рассмотрите малый участок, пройденный точками Земли за время падения, и считайте его прямолинейным.

206. [1] Импульс – это масса, умноженная на скорость. Вспоминайте, в каких единицах измеряется масса и скорость, и составляйте произведение этих единиц.

207. [1] Пользуйтесь определением импульса.

208. [1] Пользуйтесь законом сохранения импульса. Не забывайте, что импульс – векторная величина. В начальном состоянии импульс системы равен нулю. Значит, в конечном состоянии он тоже равен нулю. То есть, векторы импульсов тележек равны друг другу и противоположны по направлению.

209. [2] Закон сохранения импульса выполняется (нет никаких причин его нарушения). А указанное равенство не выполняется, так как в нём не учитывается импульс пружины.

210. [2] Используйте закон сохранения импульса. Приравняйте импульс системы в начальном состоянии импульсу в конечном состоянии.

211. [1] Пользуйтесь законом сохранения импульса. Не забывайте, что импульс – векторная величина. В начальном состоянии импульс системы равен нулю. Значит, в конечном состоянии он тоже равен нулю.

212. [2] Руководствуйтесь законом сохранения импульса.

213. [1] Руководствуйтесь законом сохранения импульса.

214. [1] Руководствуйтесь законом сохранения импульса. Импульс до взрыва равен импульсу после взрыва.

215. [2] Импульс до сцепки равен импульсу после сцепки.

216. [3] В данной задаче импульс системы, вообще говоря, не сохраняется (сила реакции опоры изменяет импульс насыпаемого угля), но сохраняется проекция импульса на горизонтальную ось.

217. [2] Пользуйтесь законом изменения импульса (формула (46)).

218. [2] Пользуйтесь законом изменения импульса (формула (46)).

219. [2] Если бы он не был открыт с заднего конца, то давление пороховых газов отбросило бы его назад.

220. [4] Запишите выражение для импульса патронов, вылетающих за время Δt, и применяйте закон изменения импульса (формула (46)).

221. [2] Что заставляет лететь ракету? Струя газов, образующихся при сгорании топлива и движущихся в обратную сторону. Это и есть реактивное движение. Сформулируйте общее определение.

222. [3] Применяйте закон изменения импульса в проекции на соответствующую ось.

223. [3] Применяйте закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось.

224. [3] Применяйте закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось.

225. [4] Как вы думаете, изменилась ли скорость тележки в результате открытия люка?

226. [3] Применяйте закон сохранения импульса.

227. [3] Применяйте закон сохранения импульса.

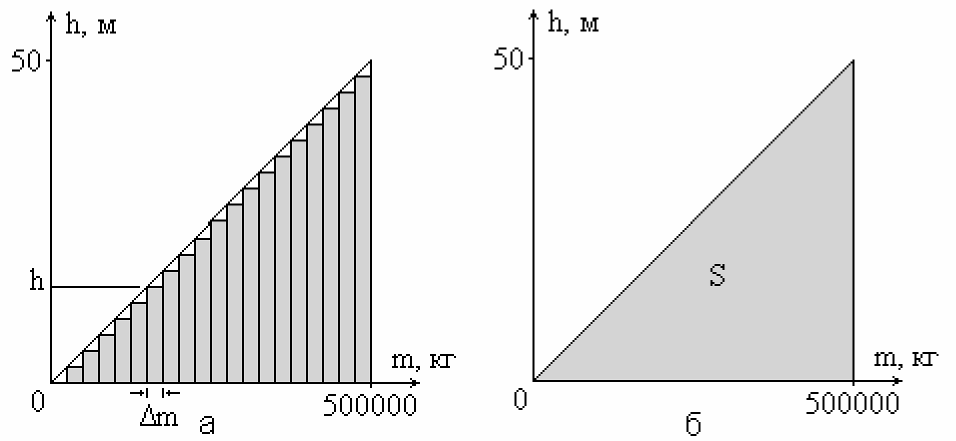
228. [4] Введите скорость человека относительно земли. При решении она сократится.

229. [4] Применяйте закон сохранения импульса и закон сложения скоростей.

230. [4] Применяйте закон сохранения импульса и закон сложения скоростей. Направление горизонтальной оси OX можно выбрать произвольно и обозначить проекцию скорости верёвки на эту ось через u_x. Если $u_x < 0$, то направление скорости противоположно направлению оси. Заранее определять направление скорости u не нужно.
231. [2] Пользуйтесь определением импульса и законом изменения импульса (формула (46)).
232. [2] Пользуйтесь определением импульса и законом изменения импульса (формула (46)).
233. [2] Пользуйтесь определением импульса.
234. [3] Записывайте закон сохранения импульса в проекциях на оси координат.
235. [3] Записывайте закон сохранения импульса в проекциях на оси координат.
236. [4] Уточним, что требуется найти. Модуль импульса, очевидно, не меняется. Нужно найти модуль изменения вектора импульса $|\Delta\vec{p}|$.
237. [4] Запишите выражение для импульса воды, падающей на дно за некоторое время t (импульс до падения). Применяйте закон изменения импульса (формулу (46)).
238. [5] Задача аналогична предыдущей.
239. [3] Применяйте закон сохранения импульса и закон сложения скоростей.
240. [4] Применяйте закон сохранения импульса.
241. [4] Пользуясь законом сохранения импульса, найдите проекции скоростей осколков на горизонтальную ось. Запишите выражение для времени падения. Дальнейшее решение очевидно.
242. [4] В наивысшей точке траектории импульс равен нулю. Поэтому импульс третьего осколка равен векторной сумме импульсов двух первых осколков, взятой со знаком минус.
243. [3] Применяйте закон сохранения импульса.
244. [4] Применяйте закон сохранения импульса для вычисления приращения скорости в верхней точке. Зная приращение скорости, вычислите приращение длины.
245. [5] Применяйте закон сохранения импульса и закон сложения скоростей. Учтите, что масса снаряда много меньше массы корабля.
246. [5] Учтите, что система отсчёта, связанная с тележкой – неинерциальная. Расчёты нужно проводить в земной системе отсчёта. С помощью закона сохранения импульса можно найти конечную скорость тележки.
247. [5] Запишите выражение для импульса верёвки, разматывающейся за время Δt, и применяйте закон изменения импульса (формула (46)).
248. [4] Применяйте закон сохранения импульса и закон сложения скоростей.
249. [3] Применяйте закон изменения импульса, чтобы найти реактивную силу.
250. [4] Применяйте закон сохранения импульса, а также формулу для суммы геометрической прогрессии.
251. [5] Примените закон изменения импульса в проекции на ось, направленную вдоль склона. Трение качения не учитывайте.
252. [4] Учитывайте опыт задачи 236.
253. [5] При ударе горизонтальное и вертикальное ускорения кусочка в любой момент связаны равенством $a_{гор} = \mu a_{верт}$ (силой тяжести в момент удара можно пренебречь). Пусть кусочек подлетает к конвейеру со скоростью υ. Когда вертикальная составляющая скорости обратится в нуль, горизонтальная станет равна $\mu\upsilon$. Когда вертикальная составляющая вновь станет равна υ, к горизонтальной добавится ещё $\mu\upsilon$ и она станет равна $2\mu\upsilon$. Когда кусочек ударится о ленту второй раз, горизонтальная составляющая сравняется со скоростью ленты (как показывают вычисления) и далее увеличиваться не будет.
254. [5] Применяйте закон изменения импульса.
255. [2] Можно воспользоваться определением центра масс (48) или правилом рычага, как описано в конце параграфа 24.
256. [3] Положения центров масс отрезков AB и BC – середины этих отрезков. Массы отрезков пропорциональны их длинам. Заменяя уголок из проволоки эквивалентной системой из двух точечных масс, легко найти центр масс системы.
257. [5] Воспользуйтесь тем, что центр масс системы, независимо от поведения мухи, движется с ускорением свободного падения.
258. [4] Воспользуйтесь тем, что положение центра масс системы не изменяется.
259. [4] Воспользуйтесь тем, что положение центра масс системы не изменяется.

260. [4] Конец пружины, прилегающий к более лёгкой тележке, приобретает большую скорость, чем противоположный конец. Если пружина по своей длине однородная, то отсюда следует, что её импульс направлен в сторону более лёгкой тележки.
261. [3] Можно воспользоваться определением центра масс (48) или правилом рычага, как описано в конце параграфа 24.
262. [3] Используйте определение работы силы и обратите внимание, что в него входит перемещение именно точки приложения силы.
263. [1] Пользуйтесь определением работы.
264. [2] Пользуйтесь определением работы.
265. [3] Пользуйтесь определением работы.
266. [1] Используйте формулу для потенциальной энергии тела, поднятого над землёй.
267. [1] Используйте формулу для кинетической энергии.
268. [2] Используйте формулу для потенциальной энергии тела, поднятого над землёй.
269. [2] Используйте закон сохранения энергии: кинетическая энергия, которой обладал камень сразу после броска, перешла в потенциальную энергию.
270. [3] Кинетическая энергия в начальный момент равна сумме кинетической и потенциальной энергии на высоте h.
271. [2] А как вы думаете, уменьшилась ли масса вещества в результате сгорания?
272. [2] Используйте закон сохранения энергии.
273. [3] Если тело движется равномерно, то его кинетическая энергия не меняется. Поэтому из теоремы об изменении кинетической энергии следует, что суммарная работа всех сил равна нулю.
274. [2] Используйте закон сохранения энергии (или теорему об изменении кинетической энергии).
275. [3] Используйте закон сохранения энергии (или теорему об изменении кинетической энергии).
276. [3] Используйте теорему об изменении кинетической энергии.
277. [3] Как вы думаете, что будет, если вращение Земли затормозить (т.е. преобразовать энергию вращения в какую-нибудь другую энергию)?
278. [5] а.) Грузы справа находятся дальше от оси центра, но зато с левой стороны грузов больше. Из этого сделайте вывод о моментах сил.
б.) На самый нижний из находящихся в сосуде с водой поплавков действует сила давления воды сверху. Она будет больше всех сил Архимеда вместе (сделайте расчёт и убедитесь в этом). Поэтому на самом деле цепь будет вращаться не в том направлении, которое показано стрелкой, а в противоположном, и вода быстро выльется из сосуда. А чтобы снова налить воду в сосуд, нужно затратить энергию. Поэтому вечный двигатель не получится.
в.) Когда трубки расположатся под углом 45° к горизонту, ртуть в обеих трубках перельётся в нижние колена. Произойдёт несколько колебаний трубки туда-сюда, но правое колено не поднимется выше горизонтали, и поэтому ртуть не будет переливаться.
г.) Во-первых, закон Архимеда и формула (17) здесь не применимы, поскольку барабан не погружён в воду полностью и не плавает. На барабан, конечно, действует некоторая сила со стороны воды. Но простое рассуждение показывает, что линия действия этой силы проходит через ось барабана. Поэтому её плечо равно нулю, а значит, и момент равен нулю. Действительно, сила давления жидкости перпендикулярна поверхности. На каждый маленький участок барабана действует сила, перпендикулярная поверхности. Линия действия каждой такой силы проходит через ось барабана, поэтому момент силы равен нулю. Значит, момент равнодействующей всех этих сил тоже равен нулю. Кстати, равнодействующая всех этих сил направлена не вертикально, а под некоторым углом к вертикали (попробуйте объяснить, почему).
279. [4] Учтите, что из-за отрицательной работы силы сопротивления воздуха скорость мяча в каждой точке траектории в момент спуска будет меньше, чем в момент подъёма.
280. [3] Сначала санки обладали потенциальной энергией, потом она превращалась в кинетическую и в тепловую. Когда санки затормозили, вся механическая энергия перешла в тепловую.
281. [3] Вычислите, до какой высоты поднимется камень. На половине этой высоты половина всей механической энергии будет потенциальной, а другая половина – кинетической. Поэтому вычисленную высоту нужно разделить на 2.
282. [3] Рассмотрим цепочку с конца:

электроэнергия ← кинетическая энергия воды ← потенциальная энергия воды ← потенциальная энергия воды в облаках. Перед тем, как попасть в облака, вода находилась в водоёмах на земле. Подумайте, за счёт какой энергии осуществляется круговорот воды в природе.
283. [5] Работа равна потенциальной энергии башни. Построим график зависимости высоты башни от её массы во время строительства (см. рис.). Разобьём башню на много маленьких отрезков. Массу каждого отрезка обозначим за Δm. Так как каждый отрезок маленький, потенциальную каждого кирпича в нём можно считать одинаковой. Поэтому потенциальная энергия одного отрезка примерно равна $E_p = \Delta mgh$. Нарисуем под графиком прямоугольники со сторонами h и Δm (рис. 72, а). Потенциальная энергия одного отрезка равна площади одного прямоугольника, умноженной на g. Значит, полная потенциальная энергия башни, примерно равна сумме площадей маленьких прямоугольников, умноженной на g.



Чем меньше масса Δm, тем точнее вычисляется энергия, т.к. энергию кирпичей на одном отрезке можно с большей точностью считать одинаковым. Из этих рассуждений следует, что *потенциальная энергия башни равна площади фигуры под графиком* (в данном случае – треугольника), *умноженной на g*. Теперь вы легко найдёте эту энергию: площадь треугольника равна половине площади прямоугольника со сторонами 500000 кг и 50 м («площадь» выражается в данном случае в кг·м).
284. [2] Работа равна приращению потенциальной энергии.
285. [4] При ударе часть механической энергии системы переходит во внутреннюю (рассеивается в виде теплового движения молекул). Поэтому сначала нужно применить закон сохранения импульса для нахождения скорости сваи после удара.
286. [3] Работа равна приращению потенциальной энергии. Обратите внимание на высоту подъёма центра масс.
287. [5] Работа равна приращению потенциальной энергии системы. Система состоит из Земли, столба и воды. При поднятии столба такой же объём воды с поверхности перемещается на его место.
288. [5] Работа равна приращению потенциальной энергии системы. Система состоит из Земли, трубы и воды. При перемещении трубы в вертикальное положение такой же объём воды перемещается на место трубы в горизонтальном положении.
289. [4] На пробивание одного экрана затрачивается определённая энергия. При пробивании первого экрана скорость уменьшается на 90 м/с, но при пробивании второго экрана – уже на другую величину. Одинакова не потеря скорости, а потеря энергии. Введите массу пули m. Она сократится.
290. [4] Вычисляйте работу силы как площадь под графиком.
291. [2] Потенциальная энергия сжатой пружины переходит в кинетическую энергию пули. Приравняйте выражения для этих энергий.
292. [3] Получите выражения для скорости пули до изменения параметров и после изменения и разделите одно на другое.
293. [2] Потенциальная энергия шарика, поднятого над землёй, полностью переходит в энергию сжатой пружины.
294. [3] Работа силы трения равна изменению потенциальной энергии системы к моменту остановки.
295. [3] Воспользуйтесь определением импульса и энергии и составьте систему уравнений.
296. [3] Используйте законы сохранения импульса и энергии.
297. [4] Используйте законы сохранения импульса и энергии.

298. [4] Свяжите энергию сжатия пружины с силой упругости при сжатии.
299. [4] Рассмотрим две оси координат: одна направлена вдоль стены в плоскости траектории мяча, а другая перпендикулярна стене. Проекция импульса на первую ось сохраняется в соответствии с формулой (46); трение не учитываем в силу того, что удар абсолютно упругий. Модуль проекции скорости на вторую ось сохраняется в силу закона сохранения энергии.
300. [4] Для этого надо решить задачу 297 двумя способами: через законы сохранения импульса и энергии и через закон сохранения импульса плюс сложение скоростей, считая, что утверждение задачи верно. Идентичность полученных результатов говорит о том, что оно действительно верно.
301. [2] Используйте законы сохранения импульса и энергии.
302. [4] Сначала нужно, используя закон сохранения импульса, найти скорость слипшегося куска пластилина. Затем нужно найти убыль кинетической энергии системы.
303. [6] Используйте законы сохранения импульса и энергии. Получится довольно громоздкая система уравнений, но – ничего не поделать – надо её решать.
304. [4] Используйте законы сохранения импульса и энергии и теорему, обратную теореме Пифагора.
305. [4] Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и учтите, что покоившийся шар полетел в направлении прямой, соединяющей центры шаров при столкновении.
306. [3] Пользуйтесь законом сохранения энергии и вторым законом Ньютона.
307. [3] Пользуйтесь законом сохранения энергии и вторым законом Ньютона.
308. [3] Используйте законы сохранения импульса и энергии.
309. [3] Центр масс гантельки движется вертикально. В момент её удара о стол нижний шар неподвижен. Полезно нарисовать конечное состояние под начальным. Ответ не зависит от массы нижнего шара. Работа силы тяжести не зависит от неё (она равна сумме работ сил тяжести двух верхних шаров). Кинематическая связь между скоростями среднего и верхнего шара тоже всегда одинаковая.
310. [4] Скорость груза максимальна в момент, когда его ускорение равно нулю (объясните, почему).
311. [3] Используйте законы сохранения импульса и энергии.
312. [4] Механическая энергия системы шариков и Земли не сохраняется (работа внутренних сил при деформации шариков не равна нулю, и часть энергии переходит во внутреннюю). Используйте закон сохранения импульса. Закон сохранения механической энергии “более требовательный”, чем сохранения импульса, т.к. затрагивает внутренние силы системы.
313. [4] Скорость максимальна, когда ускорение равно нулю (в данном случае – когда пружина не деформирована). Сжатие максимально, когда скорости всех частей системы равны.
314. [4] Используйте законы сохранения импульса и энергии. Во втором опыте в земной системе отсчёта ядро вылетело из ствола под углом, отличным от α. При решении не вводите новый угол, а работайте с проекциями.
315. [3] Используйте закон сохранения энергии и учтите, что в верхней точке ускорение свободного падения равно центростремительному ускорению.
316. [4] Стержень принципиально отличается от нити тем, что он жёсткий. Шарик может опираться на стержень, поэтому его скорость в верхней точке может быть равна нулю. С нитью такое невозможно.
317. [5] Используйте законы сохранения импульса, энергии, сложения скоростей, а также учтите опыт задачи 315.
318. [4] Условием отрыва в данном случае является равенство нулю силы реакции опоры.
319. [5] Скорость бруска максимальна в тот момент, когда груз проходит нижнюю точку траектории во второй раз. До этого брусок ускоряется.
320. [3] Потенциальная энергия тел переходит в кинетическую. То есть, брусок и шар имеют в момент спуска одинаковую кинетическую энергию. Чей же центр масс движется быстрее?
321. [5] Рассмотрите некоторый путь, пройденный обручем, и примените теорему об изменении кинетической энергии.
322. [5] Рассмотрите некоторый путь, пройденный катушкой, и примените теорему об изменении кинетической энергии.

323. [4] Применяйте теорему об изменении кинетической энергии. Убедитесь, что точки обруча движутся с постоянным тангенциальным ускорением (имеет место нечто похожее на второй закон Ньютона). С учётом этого находите время торможения.
324. [6] Применяйте формулы кинематики, закон сложения скоростей и теорему об изменении кинетической энергии, а также опыт предыдущей задачи. Будьте внимательны при нахождении работы силы трения. Перемещение, входящее в формулу для работы, – это перемещение не центра масс, а именно точки приложения силы. Сила трения приложена в разные моменты времени к разным точкам обруча. Нужно найти суммарный путь, пройденный точками приложения силы трения.
325. [6] Учтите, что при протаскивании коврика выделяется тепло (не вся работа силы F переходит в кинетическую энергию валиков). Учтите опыт задачи 323.
326. [6] Нужно мысленно разбить горку на много бесконечно малых участков, каждый из которых можно считать плоским. Просуммируйте работу на всех участках. Вы увидите, что она не зависит от формы горки. Разбиение на бесконечно малые участки аналогично, например, задаче 283. Однако здесь не обязательно строить графики.
327. [6] Пользуйтесь опытом предыдущей задачи и теоремой об изменении кинетической энергии.
328. [5] Используйте законы сохранения импульса и энергии. Чтобы найти, в какой точке траектории выгоднее всего совершить прыжок, нужно найти минимум некоторой функции. Это можно сделать одним из способов, описанных в подсказке к задаче 67.
329. [4] Ответ зависит от материала, из которого сделаны шары. Большинство материалов при нагревании расширяется. В этом случае работа силы тяжести, действующей на висящий шар, положительна. Она добавляет ему энергию. Работа силы тяжести, действующей на лежащий шар, отрицательна. Она отнимает у него энергию. Висящий шар нагреется чуть больше, хотя практически разность температур мала. Если материал шаров при нагревании сужается (например, вода при температуре от 0 до 4°C), то нагреется больше лежащий шар.
330. [6] Решать задачу через законы сохранения. Одного закона сохранения энергии мало: при соударении пластилина и груза часть механической энергии переходит во внутреннюю. Нужно применить закон сохранения импульса, но учесть важную деталь. При столкновении левого груза с пластилином этот груз взаимодействует через нить с правым грузом. Ускорения и скорости грузов в любой момент времени будут равны. Поэтому столкновение будет таким, как будто пластилин столкнулся с бруском массой $m_1 + m_2$ (а не просто m_1).
331. [8] Нужно искать минимум работы при условии, что человек запрыгнет на возвышение. Работа является функцией от двух переменных: начальной скорости и угла, под которым она направлена. От двух переменных нужно перейти к одной с помощью уравнения траектории.
332. [7] Заметим, что пока ни один из шариков не оторвался от стены, центр масс гантельки движется по окружности. С учётом этого можно провести аналогию с задачей 318.
333. [8] Теорема об изменении кинетической энергии для санок на самом деле выполняется. При рассмотрении движения санок в системе отсчёта, связанной с машиной, эту систему можно с огромной точностью считать инерциальной. Но в теореме об изменении кинетической энергии фигурируют все силы. Перед нами редкий случай, когда сила реакции опоры, действующая на санки, совершает работу. Обычно эта сила перпендикулярна скорости, но в нашем случае – нет (нужно нарисовать начальное и конечное положение санок и приближённо их траекторию относительно машины). А вот для Земли эта теорема не выполняется. Сила реакции опоры, действующая на Землю, совершает работу, но кинетическая энергия Земли не меняется. Не выполняется второй закон Ньютона для Земли. Причина в том, что систему отсчёта, связанную с машиной, нельзя в данном случае считать инерциальной. В данном случае существенно, что работа над Землёй совершается, а скорость её точек не меняется. Поэтому закон сохранения механической энергии для системы “санки-Земля” действительно не выполняется. Отметим, что в системе Коперника закон сохранения механической энергии для системы “санки-Земля” выполняется. При спуске санок угловая скорость Земли, строго говоря, меняется. Но масса Земли во много-много раз больше массы санок, поэтому изменение незаметно. Значимость изменения скорости Земли зависит от того, какую систему отсчёта мы рассматриваем. Для всех процессов на Земле в земной системе отсчёта закон сохранения механической энергии выполняется с большой точностью.
334. [4] В системе отсчёта, связанной с землёй, сила реакции опоры, действующая на шайбу, совершает работу. Поэтому нужно перейти в систему отсчёта, связанную с горкой.

Далее подсказки даны лишь к некоторым задачам.

397. [6] Пусть имеется треугольник ABC. Проведём медиану AM и разобьём треугольник на много малых полосок, параллельных стороне BC. Очевидно, центр масс каждой полоски лежит на медиане AM. Следовательно, центр масс треугольника лежит где-то на медиане AM. Аналогично можно доказать, что центр масс треугольника лежит на двух других медианах. Следовательно, центр масс треугольной (однородной) пластинки лежит на точке пересечения медиан.

398. [6] Учтём результат предыдущей задачи: центр масс однородной треугольной пластинки лежит в точке пересечения медиан. Пусть имеется выпуклый четырёхугольник ABCD. Сначала разобьём его одной диагональю на треугольники ABC и DBC. Найдём центры масс P и Q этих треугольников. Центр масс четырёхугольника лежит где-то на прямой PQ. Теперь разобьём четырёхугольник другой диагональю на треугольники ABD и CBD. Найдём центры масс R и T этих треугольников. Центр масс четырёхугольника лежит где-то на прямой RT. Значит, центр масс четырёхугольника лежит на пересечении прямых PQ и RT.

404. [3] В конструкции на рисунке б.) скорость ветра над крышей меньше, чем на рисунке а.) Следовательно, в соответствии с уравнением Бернулли, разность давлений под крышей и над крышей на рисунке б.) меньше.

408. [3] Представим, что мы чуть сдвинули шланг от начального положения. При этом скорость потока воздуха будет больше над центром шланга. Значит, давление будет больше на периферии. Разность давлений вталкивает шарик в центр потока.

414. [3] Подкрученный удар осуществляется за счёт эффекта Магнуса. Подкрученный мяч отклоняется в ту сторону, где направление вращения совпадает с направлением встречного потока воздуха.

Ответы

1. 5 м/с.
2. υ_1 = 5 км/ч = 1,39 м/с, s_2 = 9 км = 9000 м, t_3 = 2 ч = 7200 с.
3. Катя и Наташа встретятся на расстоянии 3,2 км от Липовки.
4. Путь равен 2 м, а перемещение равно нулю.
5. 14 м/с.
6. Пусть ось x направлена на север, y – на восток, а z – вверх. Тогда $x = v_{сам}t$ = 1440000 м, $y = v_{вет}t$ = 72000 м, z = h = 8000 м.
7. Неверно.
8. $t = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 45$ с.
9. $x_{ср} = \dfrac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} = 48$ км/ч.
10. $x_{ср} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 60$ км/ч.
11. Время движения по реке равно 125 с, а по озеру – 120 с.
12. $S_{общ} \approx 17{,}33$ км.
13. $11\frac{1}{9}$ м.
14. $t = \dfrac{\upsilon_1 \Delta t}{\upsilon_1 - \upsilon_2} = 35$ мин.
15. $t = \dfrac{S(\upsilon_3 - \upsilon_1)}{\upsilon_3(\upsilon_1 - \upsilon_2)} = 16$ мин. Средняя скорость равна 70 км/ч.
16. За 6 часов.
17. 900 м/с.
18. 72 с.
19. 60 км/ч.
20. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1 \upsilon_2} = 6$ км/ч.
21. $\upsilon = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2 \cos\alpha}$.

22. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} = 5$ м/с.
23. 180 с.
24. $V_A = 2V$; $V_B = 0$; $V_C = \sqrt{2}V$.
25. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{2L}{t}\upsilon_0}$.
26. 60°.
27. 53,1°.
28. 60°.
29. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} = 116,6$ км/ч, $\alpha = 31°$.
30. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} = 13$ м/с.
31. 30°.
32. $\upsilon = Vtg\alpha = 28,9$ м/с.
33. $V_C = 4,47$ м/с.
34. $t = \frac{S_1\upsilon_1 + S_2\upsilon_2}{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} = 3,84$ с; $l = \frac{|S_1\upsilon_2 - S_2\upsilon_1|}{\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}} = 28$ м.
35. $t = \frac{2}{3}\frac{a}{\upsilon}$.
36. $d = 2\sqrt{R^2 - r^2} - 2r\arccos\frac{r}{R}$.
37. $h = \frac{\upsilon\upsilon_{зв}t}{\sqrt{\upsilon^2 - \upsilon_{зв}^2}} = 7469$ м.
38. $\upsilon = gt = 10$ м/с; $S = \frac{gt^2}{2} = 5$ м.
39. 10 с.
40. $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2,5$ с.
41. 5 м/с^2.
42. Большее ускорение имеет первое тело, и оно равно 2 м/с^2.
43. <ответ представляет собой график>.
44. $t = \frac{2L}{\upsilon + \upsilon_0} = 16$ с.
45. 320 м.
46. $a = \frac{\upsilon^2}{2(\upsilon t - s)} \approx 10,2$ м/с^2.
47. 5 м/с.
48. $a = 0,02$ м/с^2; $v_0 = 0,01$ м/с.
49. 8 м/с^2.
50. $\upsilon = \sqrt{2gh} = 8$ м/с.
51. $a = 3,2$ м/с^2; $v_0 = 13,6$ м/с.
52. 195 м.
53. $h = \left(\upsilon\left(\sqrt{\frac{1}{2a} + \frac{t}{\upsilon}} - \sqrt{\frac{1}{2a}}\right)\right)^2 = 63$ м, где $a = \frac{F}{m} - g = 12$ м/с^2.
54. $h_{дома} = \frac{g}{2}\left(\frac{h}{g\tau} + \frac{\tau}{2}\right)^2 = 11,25$ м; $\upsilon = g\tau = 10$ м/с.
55. Не является.
56. $h = \frac{2\upsilon_{ср}^2}{g} = 5$ м.

57. 2,6 с.
58. За вторую.
59. $t_п = \frac{S}{gt} + \frac{t}{2} = 2{,}9$ с.
60. t = 3,3 с; h = 56 м.
61. $t = \frac{2V}{a} = 20$ с.
62. 14 м и 42 м.
63. <ответ представляет собой график>.
64. Не догонит.
65. $\upsilon_0 = \sqrt{2gS - \upsilon^2} = 9{,}17\,м/с$.
66. 5 м.
67. $\upsilon_{\min} = \sqrt{2aS}$.
68. $x = \upsilon_0 t = 30$ м, $y = \frac{gt^2}{2} = 20$ м.
69. $L = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}34$ м.
70. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gt\upsilon_0 \sin\alpha + g^2 t^2}$, $\quad \beta = arctg \frac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt}{\upsilon_0 \cos\alpha}$.
71. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}$.
72. $l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 10$ м, $h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 2{,}5$ м, $\upsilon = \upsilon_0 \cos\alpha = 7{,}1$ м/с.
73. $\alpha = arctg 16 = 86{,}4°$.
74. $\alpha = 45°$, $L_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g} = 250$ м.
75. $h = \frac{gl^2}{2\upsilon_0^2} = 2{,}8$ м.
76. $t = 2{,}2$ с, $L = \upsilon_0 t \cos\alpha = 21{,}8$ м.
77. Успел.
78. $\upsilon_0 = \sqrt{\frac{gL^2}{(Ltg\alpha - h)\cdot 2\cos^2\alpha}} = 30{,}5$ м/с.
79. $m = \frac{2\rho\upsilon_0^2 S \sin\alpha}{g} = 7$ м/с.
80. Угол определяется из условий задачи неоднозначно: возможны два значения угла

$$\alpha = arctg \frac{\upsilon_0^2 \pm \upsilon_0^2 \sqrt{1 - \frac{2g}{\upsilon_0^2}(\frac{gl^2}{2\upsilon_0^2} + h)}}{gl}.$$

81. $R = \left| 2L - \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} \right| = 3{,}3$ м.
82. $\upsilon = \left| \upsilon_0 (\cos\alpha - ctg\varphi \sin\alpha) + gt \cdot ctg\varphi \right|$. Сразу после прыжка (t = 0) υ = 3,26 м/с; спустя время t – υ = 7,13 м/с.
83. $L = \frac{2\upsilon_0^2}{g} \frac{\cos^2\alpha}{\cos\varphi}(tg\alpha - tg\varphi) = 14{,}9$ м.
84. $h = \frac{gt^2}{8} = 1{,}25$ м.

85. $\upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{1+\alpha^2}{2\beta}}$

86. $d = 4gh_{\max}\dfrac{x}{\upsilon} - \dfrac{gx^2}{\upsilon^2} = 2x - \dfrac{5}{8}x^2$ (в метрах).

87. $\alpha = arctg\,\dfrac{h(2a+L)}{a(a+L)}$.

88. $L = 8h\sin\alpha$.

89. $t = \sqrt{t_1 t_2}$.

90. $L = \dfrac{|\upsilon_0\cos\alpha - V|\left(\upsilon_0\sin\alpha + \sqrt{\upsilon_0^2\sin^2\alpha + 2gh}\right)}{g} = 7{,}7$ м.

91. $h = R + \dfrac{\upsilon_0^2}{2g} + \dfrac{gR^2}{2\upsilon_0^2}$.

92. $\upsilon = \sqrt{5gR}$.

93. $\alpha_{\max} = 70{,}5°$.

94. $a = \dfrac{V^2}{R} = 2{,}25$ м/с^2.

95. $R = \dfrac{V^2}{a} = 50$ м.

96. $\upsilon = \sqrt{aR} = 6$ м/с.

97. Не является.

98. $R = \dfrac{at^2}{4\pi^2 N^2} = 2{,}76$ м.

99. $t = 2\pi N\sqrt{\dfrac{R}{a}}$.

100. $a = 2\pi\dfrac{V}{T} = 0{,}0059$ м/с^2.

101. Скорость второго тела больше в 4 раза.

102. Уменьшится в 2 раза.

103. $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{m}{n}$.

104. $\omega_ч : \omega_м : \omega_с = 1 : 60 : 3600$.

105. Ответ содержится в параграфе 9.

106. $R = \dfrac{(\upsilon_0^2 + g^2t^2)\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}}{\upsilon_0 g} = \dfrac{(\upsilon_0^2 + g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{\upsilon_0 g} = 104$ м.

107. 23 раза.

108. $x = R\cos\dfrac{\upsilon}{R}t$, $y = R\sin\dfrac{\upsilon}{R}t$.

109. $a = \dfrac{F}{m} = 4$ м/с^2.

110. $m = \dfrac{F}{a} = 0{,}5$ кг.

111. $F = m\dfrac{\upsilon^2}{2S} = 0{,}8$ Н.

112. $F = Mg = 6000$ Н.

113. $F = m(g+a) = 5500$ Н.

114. $g = \dfrac{2S}{t^2}\dfrac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} =$ 9,6 м/с^2.

115. $a = \dfrac{mg}{2M + m} =$ 2,3 м/с^2.

116. $a = \dfrac{mg}{M + m} =$ 6 м/с^2.

117. $S = \dfrac{Ft^2 \cos\alpha}{2m} =$8,7 м.

118. $\upsilon = \dfrac{F_1 - F_2}{m} t =$ 10 м/с.

119. $a = \dfrac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{m} =$ 100 м/с^2.

120. $a = \dfrac{1}{m}\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} =$ 52,9 м/с^2.

121. $a_1 = \dfrac{F}{m_1} =$ 0,25 м/с^2, $a_2 = \dfrac{F}{m_2} =$ 0,2 м/с^2.

122. $a_1 = \dfrac{am_2}{m_1 + m_2} =$ 2 м/с^2, $a_2 = \dfrac{am_1}{m_1 + m_2} =$ 3 м/с^2.

123. Не разорвётся. Сила натяжения равна 50 Н.

124. $T = F_2 =$ 6400 Н.

125. При движении вверх $P = m(g + a) =$ 120 Н, при движении вниз $P = m(g - a) =$ 80 Н.

126. Вес равен нулю.

127. Ответ содержится в подсказке.

128. $\Delta P = ma =$ 1400 Н.

129. $P = m(g + \dfrac{\upsilon^2}{R}) =$ 70 кН.

130. $P = m(g - \dfrac{\upsilon^2}{R}) =$ 28,75 кН.

131. $\upsilon_{\min} = \sqrt{gR} =$ 100 м/с.

132. $\dfrac{P_2}{P_1} = 1 + \dfrac{\upsilon^2}{gR} =$ 4,125.

133. Не верно.

134. $F = m\dfrac{\upsilon^2}{R} =$ 4 кН.

135. $\upsilon = \sqrt{gR} =$ 7,92 км/с.

136. Вес равен нулю.

137. Сила тяжести и сила реакции опоры. Они равны по модулю: $mg = N =$ 100 Н.

138. Цена деления равна 1 Н, коэффициент жёсткости равен 50 Н/м.

139. 300 Н/м.

140. $N = mg - kx =$ 10 Н.

141. $k = k_1 + k_2 =$ 120 Н/м.

142. $k = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2} =$ 40 Н/м.

143. $F = \mu mg =$ 300 Н.

144. Сдвинуть две верхние книги вместе.

145. Для подруги П1: $F_1 = \dfrac{m(\mu g + a)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} =$ 96,8 Н. Для подруги П2: $F_1 = \dfrac{m(\mu g + a)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} =$ 226,4 Н.

146. $T = F\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} =$ 12 Н.

147. $F = \dfrac{3}{2}kx =$ 1,5 Н.

148. Натяжение нити между первым и вторым бруском $T_1 = \dfrac{1}{3}F$, а между вторым и третьим $T_2 = \dfrac{2}{3}F$.

149. Оба динамометра показывают силу $F = mg =$ 100 Н.

150. Не сдвинется.

151. Сдвинется и будет двигаться с ускорением $a = \dfrac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg}{m} =$ 9,33 м/с^2.

152. $x = \dfrac{2m_1 m_2 g}{k(m_1 + m_2)} =$ 0,24 м.

153. $k = \dfrac{m_1}{\Delta l}\left(g - \dfrac{2h}{t^2}\right) =$ 7500 Н/м.

154. При движении вверх $m_{пок} = m\dfrac{g+a}{g} = 330$ г ; вниз - $m_{пок} = m\dfrac{g-a}{g} = 270$ г.

155. $a' = \dfrac{(a+g)(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} =$ 3,67 м/с^2.

156. $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) =$ 6,2 м/с^2.

157. $t = \sqrt{\dfrac{2L}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} =$ 7,8 с.

158. $F_{тр.пок} = mg\sin\alpha =$ 10 Н.

159. $\mu_{\min} = tg\alpha$.

160. а.) $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha =$ 9,1 Н; б.) $F_{тр} = mg\sin\alpha =$ 17,5 Н.

161. $\mu = \dfrac{4\pi^2 R}{gT^2} =$ 0,3.

162. $R = \dfrac{\upsilon^2}{g \cdot tg\alpha}$.

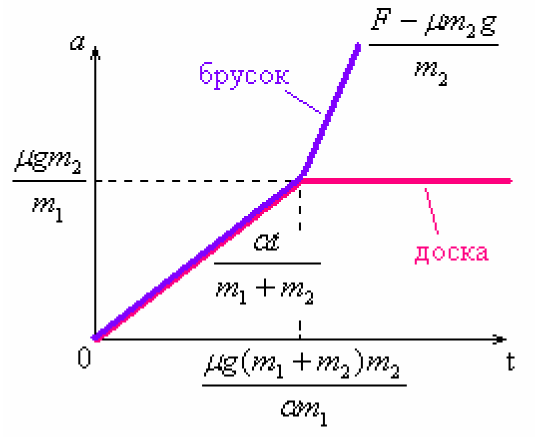
163. $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 L^2 \sin^2\alpha} =$ 51 Н.

164. $R = \dfrac{\upsilon^2}{\mu g} =$ 20 м, $\alpha = arcctg\mu =$ 63°.

165. $x = \dfrac{m}{k}\left(g + \dfrac{V^2}{l}\right) =$ 5,3 см.

166. $F = (M+m)a + 2\mu mg =$ 25 Н.

167. $a = \dfrac{(M+m)g\sin\alpha}{m}$.

168. 

169. $F = \dfrac{Gm_1m_2}{R^2}$ = 1,89·10^{20} Н.

170. $M = \dfrac{gR^2}{G}$ = 6,14·10^{24} кг.

171. $M = \dfrac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$.

172. $M = \dfrac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$ = 1,96·10^{30} кг.

173. $g = \dfrac{GM}{R^2}$.

174. $R_2 = (\sqrt{2}-1)R$ = 2650 км.

175. $\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$.

176. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$ = 1,4 часа.

177. $R = \dfrac{\upsilon_1}{2\sqrt{\dfrac{\pi}{3}G\rho}}$ = 6000 км.

178. $\upsilon_1 = \upsilon\dfrac{T_1+T_2}{T_1-T_2}$ = 8,1 км/с.

179. $\upsilon_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{R}{T}}$ = 3,4 км/с.

180. $\Delta g = \dfrac{2GM}{L^2} = 6{,}64\cdot 10^{-5}\ м/с^2$.

181. Не изменится.

182. Время падения на экваторе больше; $\dfrac{t_{экв}}{t_{пол}} = \sqrt{\dfrac{g}{g-\dfrac{4\pi^2}{T^2}R}}$ = 1,0017.

183. $m_{\max} = M(\cos\alpha - \dfrac{1}{\mu}\sin\alpha)$ = 0,32 кг.

184. $a = \mu g$, $S = \dfrac{\upsilon^2}{2\mu g}$.

185. $S = \dfrac{\mu g t^2}{2}$ = 10 м.

186. $\mu = \frac{N-1}{N+1} tg\alpha$.

187. Ответ содержится в подсказке.

188. $a = \frac{M+m}{M} g$.

189. $\mu < \frac{m}{M+m}$.

190. $s = \frac{M\upsilon^2}{2\mu g(M+m)} = 2{,}8$ м.

191. Допустимые значения массы лежат в интервале $(M\sin\alpha - \mu M\cos\alpha; M\sin\alpha + \mu M\cos\alpha)$, т.е. $m \in (0{,}13;1{,}87)$ кг.

192. Брусок будет подниматься по наклонной плоскости. $a = g\frac{m - M(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{M} =$ 7,57 м/с^2.

193. $\mu = \frac{a_ц \sin\varphi}{g - a_ц\cos\varphi} = 1{,}49 \cdot 10^{-3}$, где $a_ц = \frac{4\pi^2 R\cos\varphi}{T^2} = 0{,}0169$ м/с^2. T = 86400 с.

194. $a = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)$. если $\mu_1 < \mu_2$, как в первом случае, $a = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)$, если $\mu_2 < \mu_1$, как во втором случае. В первом случае a = 3,27 м/с^2, а во втором - a = 2,4 м/с^2.

195. $\mu = -ctg(\alpha + \beta) = 0{,}17$.

196. $x = \frac{m + S\rho_л h}{S(\rho_в - \rho_л)} = 1$ м.

197. $V = \frac{m}{\rho_в - \rho_г} =$ 2000 м^3.

198. $a = g\frac{\rho_в - \rho_д}{\rho_д} =$ 2,5 м/с^2.

199. $m = 2(\rho V - M) =$ 27 кг.

200. Не сохранится. Чтобы равновесие сохранилось, нужно на правую чашу положить груз массой m = 2Vρ, где V – объём груза, ρ – плотность воды.

201. $\vec{F}_{Арх} = \rho V(\vec{a} - \vec{g})$.

202. Трос отклонится назад по ходу поезда. $T' = T\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{g}$.

203. Ответ содержится в подсказке.

204. Ответ содержится в подсказке.

205. $x = \frac{2\pi H}{T}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

206. кг·м/с.

207. 25 кг·м/с.

208. $\upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 =$ 0,4 м/с.

209. Указанное равенство не выполняется, однако закон сохранения импульса с учётом импульса пружины выполняется.

210. $\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} =$ 5,5 м/с.

211. 2 м/с.

212. В первом случае – нет, во втором – да.

213. Да.

214. В первом случае – нет, во втором – да.

215. $V' = \frac{3}{4}V =$ 0,3 м/с.

216. $\upsilon_1 = \dfrac{M\upsilon}{M+m} =$ 0,4 м/с.

217. $p = Ft =$ 90000 кг·м/с.

218. $p = Ft =$ 19992 кг·м/с, $m = \dfrac{p}{V} =$ 1000 кг.

219. Для уменьшения силы отдачи (пороховые газы выходят через задний открытый конец).

220. $F = m\upsilon\dfrac{\Delta N}{\Delta t} =$ 15 Н.

221. Реактивное движение – движение за счёт выброса импульса в противоположном направлении. Реактивная сила – сила, действующая на тело со стороны выбрасываемого вещества.

222. $t = \dfrac{p}{F\cos\alpha} =$ 1,15 с.

223. $\upsilon = \dfrac{mu\cos\alpha}{M} =$ 0,08 м/с.

224. $m = \dfrac{M\upsilon_1}{\upsilon_2\cos\alpha} =$ 30 кг.

225. $\upsilon_1 = \dfrac{M\upsilon}{M+m} =$ 2 м/с.

226. $\upsilon =$ 0,83 м/с, $\alpha = arctg\, 0{,}75 =$ 36,9°.

227. $\upsilon = \dfrac{\sqrt{m_1^2\upsilon_1^2 + m_2^2\upsilon_2^2}}{m_1+m_2}$.

228. $d = \dfrac{ml}{m+M} =$ 1 м.

229. В первом случае $\upsilon_1 = \dfrac{M\upsilon_0 + mu}{M+m} =$ 2,33 м/с, во втором случае $\upsilon_1 = \dfrac{mu - M\upsilon_0}{M+m} =$ 1 м/с.

230. $\upsilon_1 = \dfrac{m_2(u_1+u_2)}{m_1+m_2} = 0{,}9\,м/с$; $\upsilon_2 = \dfrac{m_1(u_1+u_2)}{m_1+m_2} = 0{,}7\,м/с$; $u = |\upsilon_1 - u_1| = 0{,}1\,м/с$.

231. $\Delta p = 2m\upsilon =$ 2 кг·м/с, $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} =$ 200 Н.

232. $\Delta p = m\sqrt{2gh} =$ 0,6 кг·м/с, $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} =$ 12 Н.

233. $\Delta p = 2m\upsilon\cos\dfrac{\alpha}{2} =$ 0,25 кг·м/с.

234. $\upsilon_2 = \dfrac{m_1\upsilon_0}{m_2\cos\alpha} =$ 9,2 м/с, $\upsilon_1 = \upsilon_2\sin\alpha =$ 4,6 м/с.

235. $\upsilon_1 = \dfrac{\upsilon_0}{2\cos\alpha} =$ 5 м/с, $\upsilon_2 = 3\upsilon_1 =$ 15 м/с.

236. а.) $\Delta p =$ 14,14 кг·м/с; б.) $\Delta p =$ 20 кг·м/с; в.) Изменение импульса равно нулю.

237. $F = \rho S\upsilon^2 =$ 6,4 Н.

238. $F = 2\rho S\upsilon^2\cos\alpha =$ 86,4 Н.

239. $\upsilon = \dfrac{m}{M+m}(\upsilon_0 + \dfrac{M}{M+m}u)$.

240. $\upsilon_1 = \dfrac{m(M+m)\upsilon}{|M^2 - m^2|}$, $\upsilon_2 = \dfrac{M(M+m)\upsilon}{|M^2 - m^2|}$.

241. $S = \dfrac{(m_1+m_2)|\upsilon_2 - \upsilon_0|}{m_1}\sqrt{\dfrac{2h}{g}} =$ 1677 м.

242. $m_3 = \dfrac{\sqrt{m_1^2\upsilon_1^2 + m_2^2\upsilon_2^2}}{\upsilon_3} =$ 4,5 кг.

243. $\upsilon_1 = \dfrac{|0{,}6\upsilon_2 - \upsilon_0|}{0{,}4} =$ 12,5 м.

244. $\Delta l = \dfrac{m(2\upsilon_0\cos\alpha + u)}{M-m}\dfrac{\upsilon_0\sin\alpha}{g} =$ 1,4 м.

245. $\upsilon_2 - \upsilon_1 \approx \dfrac{m}{M}\upsilon\cos\alpha =$ 0,052 м/с.

246. $\mu = \dfrac{M\upsilon^2}{2gl\cdot(M+m)} = 0{,}8$

247. $\upsilon = \sqrt{\dfrac{Mg}{\lambda}}$.

248. Скорость больше в случае спрыгивания по очереди.

249. а.) $\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{Mg}{\upsilon}$, б.) $\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{3Mg}{\upsilon}$.

250. $\upsilon_n = \dfrac{\left(\dfrac{M}{M+m}\right)^n - 1}{\dfrac{M}{M+m} - 1}\dfrac{m\upsilon}{M+m}$, $\upsilon_5 = \dfrac{\left(\dfrac{M}{M+m}\right)^5 - 1}{\dfrac{M}{M+m} - 1}\dfrac{m\upsilon}{M+m}$.

251. $t = \dfrac{p\cos\alpha - M\upsilon}{Mg\sin\alpha}$.

252. $F = p\omega = \dfrac{\Delta p}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{0{,}5\pi}{\tau} =$ 2,22 Н.

253. $S = 8\mu h + 2u\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0{,}43\text{м}$.

254. $F = m_0 n S\upsilon^2\sin^2\alpha =$ 3,75 Н.

255. $d = l\dfrac{m_1}{m_1+m_2} =$ 25 см.

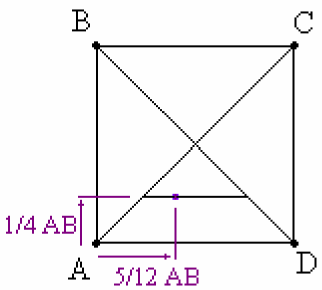
256. $x = \dfrac{0{,}5BC^2}{AB+BC}$, $y = \dfrac{0{,}5AB^2}{AB+BC}$. Ось x направлена вдоль BC, ось y вдоль BA, начало координат в точке B.

257. $t = \sqrt{\dfrac{2h-L}{g}}$.

258. $H = h\dfrac{m_1+m_2}{m_2} =$ 20 м.

259. $d = \dfrac{ml}{m+M} =$ 1,25 м.

260. В сторону более лёгкой тележки.



261. См. рисунок.

262. Работа первой силы равна нулю, а второй – –FS.

263. $S=\dfrac{A}{F}=$ 160 м.

264. $A_{кран}=mgh=$ 500000 Дж, $A_{тяж}=-mgh=$ –500000 Дж.

265. Работы равны нулю.

266. $E_p=mgh=$ 5 Дж.

267. $E_k=\dfrac{m\upsilon^2}{2}=$ 9·10^{12} Дж.

268. $h=\dfrac{E_p}{mg}=$ 15 м.

269. $h=\dfrac{\upsilon^2}{2g}=$ 1,8 м.

270. $\upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2-2gh}$.

271. Превратилась в потенциальную энергию продуктов сгорания.

272. $\eta=1-\dfrac{\upsilon^2}{2gh}=$ 0,6.

273. Работа силы F равна $A=FS\cos\alpha=$ 870 Дж, работа силы трения равна –870 Дж, работы остальных сил равны нулю. Суммарная работа равна нулю.

274. $\upsilon=\sqrt{2gR}$.

275. $\upsilon=\sqrt{2gR(1-\cos\alpha)}$.

276. $F=\dfrac{mg(h+l)}{l}=$ 42 Н.

277. Земля не является вечным источником энергии.

278. Ответ содержится в подсказке.

279. Время спуска больше времени подъёма.

280. Ответ содержится в подсказке.

281. $h=\dfrac{\upsilon^2}{4g}=$ 1,6 м.

282. Смотрите подсказку. Круговорот воды в природе осуществляется за счёт солнечной энергии.

283. $A=\dfrac{mgh}{2}=$ 1,25·10^8 Дж.

284. $A=\dfrac{mgl}{2}=$ 500 Дж.

285. $F=\dfrac{m^2gh}{d(M+m)}+(M+m)g=$ 7000 Н.

286. $A=\rho\pi R^2Lg\left(\dfrac{L}{2}-R\right)=$ 3165 Дж.

287. $A=\pi R^2Lg(\rho_б H-\rho_в(H-R))$.

288. $A=mg\left(\dfrac{L}{2}-R\right)\dfrac{\rho_ж-\rho_в}{\rho_ж}=$ 519 Дж.

289. $\mathrm{N}=\dfrac{\upsilon_0^2}{\upsilon_0^2-\upsilon^2}=$ 3,6, то есть пуля пробьет 3 экрана.

290. $\upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2+\dfrac{8RF_0}{m}}$.

291. $\upsilon=\sqrt{\dfrac{kx^2}{m}}=$ 10 м/с.

292. $\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = K\sqrt{\dfrac{N}{L}}$.

293. $x = \dfrac{mg + \sqrt{m^2 g^2 + 2mgkh}}{k}$.

294. $\mu = \dfrac{Mh}{mS}$.

295. $m = \dfrac{p^2}{2E_k} =$ 2 кг, $\upsilon = \dfrac{p}{m} =$ 4 м/с.

296. $\upsilon_1 = 0$, $\upsilon_2 =$ 8 м/с.

297. $\upsilon_1 = \dfrac{(m-M)V}{M+m}$; если эта величина отрицательна – значит, брусок меняет направление движения на противоположное. $\upsilon_2 = \dfrac{2mV}{M+m}$.

298. $\upsilon = \dfrac{\mu Mg}{\sqrt{km}}$.

299. Ответ содержится в подсказке.

300. Ответ содержится в подсказке.

301. $E_k = \dfrac{m_1^2\upsilon_1^2}{2(m_1+m_2)}$.

302. $Q = \dfrac{m_1 m_2(\upsilon_1^2+\upsilon_2^2)}{2(m_1+m_2)}$.

303. $\upsilon_1 = \dfrac{m_1\upsilon\left(\cos\theta - \sqrt{\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\theta}\right)}{m_1+m_2}$,

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}\left((m_1+m_2)^2 + m_1^2\left(\sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\theta} - \cos\theta\right)\right)}.$$

304. Ответ содержится в подсказке.

305. $\upsilon_1 = V\dfrac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2R}$, $\upsilon_2 = V\dfrac{L}{2R}$.

306. $h = \dfrac{T_{\max} l}{2mg} =$ 4,9 м.

307. $N = mg\dfrac{2H-5R}{R}$.

308. $\upsilon = \dfrac{M}{m}\sqrt{2gh} =$ 594 м/с.

309. $\upsilon = \sqrt{\dfrac{3}{5}gh}$. Не изменится.

310. $\upsilon_{\max} = g\sqrt{\dfrac{m}{k}} =$ 0,5 м/с; $x_{\max} = \dfrac{2mg}{k} =$ 0,05 м.

311. $x = \sqrt{\dfrac{m_1(m_1+m_2)V^2}{km_2}}$.

312. $h = \dfrac{m_1^2 L(1-\cos\alpha)}{(m_1+m_2)^2}$.

313. $\upsilon_{\max} = \dfrac{2}{3}\upsilon_0$; $x_{\max} = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{m}{6k}}$.

314. $\upsilon_1 = \dfrac{m\upsilon_0}{\sqrt{Mm + M^2 + (M+m)^2 tg^2\alpha}}$.

315. $\upsilon = \sqrt{5gL}$.

316. $\upsilon_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\upsilon_1$.

317. $u = \dfrac{m+M}{m}\sqrt{5gL}$.

318. $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2}{3}gR}$.

319. $\upsilon = \dfrac{2m\sqrt{2gR}}{M+m}$.

320. Скорость бруска больше.

321. $a = \dfrac{g\sin\alpha}{2}$.

322. На левом рисунке $a = \dfrac{T}{m}\left(1+\dfrac{r}{R}\right)$, на правом $a = \dfrac{T}{m}\left(1-\dfrac{r}{R}\right)$. Ускорение в обоих случаях направлено вправо.

323. $\alpha = \dfrac{M\omega^2 R}{2\mu N}$, $t = \dfrac{M\omega R}{\mu N}$.

324. $\mu = \dfrac{(3V-R\omega)^2}{4gt(V-R\omega)}$, $A = \dfrac{m}{4}(R\omega+V)(3V-R\omega)$.

325. $F = \dfrac{mV^2}{d}$.

326. $A = mg(h+\mu L)$.

327. Ответ содержится в подсказке.

328. $\upsilon_{\min} = \sqrt{2gh + \dfrac{2AM}{(M+m)m} - 4\sqrt{\dfrac{AMgh}{(M+m)m}}}$ = 4,76 м/с. Теоретически в этом случае скорость можно значительно уменьшить по сравнению с $\sqrt{2gh}$, но реально так сделать трудно.

329. Ответ зависит от материала, из которого сделаны шары. Если материал при нагревании расширяется, то больше нагреется висящий шар.

330. $h_1 = \dfrac{h(m_2^2 - m_1^2)}{(m_1+m_2+m_3)(m_1+m_3-m_2)}$.

331. $A_{\min} = \dfrac{m^2 gL^2}{4M\sqrt{h^2+L^2}} + \dfrac{mg(h+\sqrt{h^2+L^2})}{2}$.

332. $\upsilon = \sqrt{\dfrac{3}{5}gL}$.

333. Ответ содержится в подсказке.

334. $\upsilon = V + \sqrt{2gh}$.

335. 16 кВт.

336. $6\cdot10^8$ Дж.

337. 50 Вт.

338. 1500 Вт.

339. N = Fυ = 136 кВт.

340. $P_{max} = \dfrac{4MS^2}{t^3} =$ 160 кВт. $P_{ср} = \dfrac{2MS^2}{t^3} =$ 80 кВт.

341. $P = mgx_2 =$ 15 кВт.

342. 20 с.

343. 80 Вт.

344. 376,8 Вт.

345. 97%.

346. 43,2 кДж.

347. 86%.

348. 70%.

349. 60 кДж.

350. 2,4 м/с.

351. $\upsilon = \upsilon_1\upsilon_2\sqrt[3]{\dfrac{N_1+N_2}{N_1\upsilon_2^3+N_2\upsilon_1^3}}$.

352. $\upsilon = \dfrac{N_1+N_2}{F_1+F_2}$.

353. Сила натяжения троса, прикреплённого к потолку $T_1 = \dfrac{Mg}{\cos 30^\circ} =$ 461 Н, к стене $T_2 = Mg \cdot tg30^\circ =$ 230,7 Н.

354. Для наклонного стержня $N_1 = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$, для горизонтального $N_2 = mg \cdot ctg\alpha$.

355. Нет.

356. $F = \dfrac{mg}{2\sin\alpha} =$ 46,2 Н.

357. 46,2 Н.

358. 100 Н.

359. 1,6 Н.

360. АО = 0,4 м, ОВ = 0,6 м.

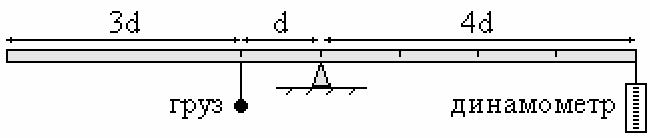
361. F_A = 3 Н, F_B = 2 Н.

362. 0,15 м.

363. 0,5 кг.

364. 11 см.

365. На левом рисунке 200 Н, а на правом – 150 Н.



366. См. рисунок. Сначала груз нужно подвесить около точки опоры, а потом отодвигать. На рисунке изображён случай для m < 2 кг.

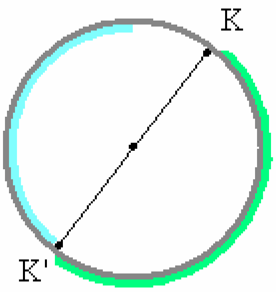
367. Угол равен $\beta =$ 30°. $T_{лев} = \dfrac{mg\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} =$ 300 Н, $T_{прав} = \dfrac{mg\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} =$ 520 Н.

368. $\mu = \dfrac{1}{2}tg\alpha$.

369. Нет.

370. Параллелепипед.

371. Раньше произойдёт опрокидывание. $a = \dfrac{gd(M+2m)}{2mh} =$ 10 м/с^2.



372. Два подходящих множества точек указаны на рисунке.

373. 6 Н.

374. 50 т.

375. $\upsilon = \dfrac{\rho_п}{\rho_в} u = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ м/с.

376. $F = \left((\rho_в H - \rho_б h)g + P_{атм}\right) \cdot \dfrac{\pi d^2}{4} = 3554$ Н.

377. $N = mg + \rho_в g\left(\dfrac{\pi d^2 h}{4} - \dfrac{m}{\rho_c}\right) = 8{,}7$ Н.

378. $V_1 = V\dfrac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = 1$ дм^3, $V_2 = V\dfrac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2} = 1$ дм^3.

379. $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{h}{L}\sqrt{\dfrac{\rho_в}{\rho_c}}\right) = 50{,}7°$.

380. 21 см.
381. 28 см.
382. Плотности равны.
383. $p_{гидр} = \rho g(h + m/\rho\pi r^2) = 1530$ Па; $p_{полн} = p_{гидр} + p_0$; $h_1 = h + m/\rho\pi r^2 = 15{,}3$ см.

384. $T = g\left|m\dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} - \rho_1 h \pi r^2\right|$.

385. $T = \dfrac{mg(l + R)}{\sqrt{l^2 + 2lR}} = 302$ Н, $N = \dfrac{mgR}{\sqrt{l^2 + 2lR}} = 33{,}5$ Н.

386. $\mu = 1$.

387. $T = \dfrac{1}{2} mg\,ctg\alpha = 0{,}058$ Н.

388. $h = \dfrac{\mu l \cos\alpha}{tg\alpha} = 4{,}5$ м.

389. $tg\alpha < \mu_1$ при любом μ_2.

390. $L = \dfrac{L_1 + L_2}{4}$.

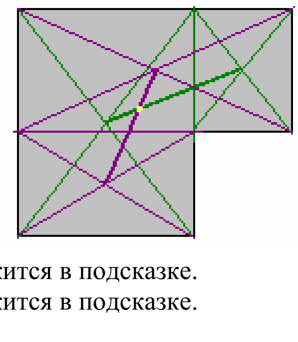
391. $h = L\left(1 - \sqrt{\dfrac{\rho_ж - \rho_п}{\rho_ж}}\right)$.

392. $T = \dfrac{3}{2} mg$.

393. Центр масс совпадает с центром шарика m_3.

394. Смещён влево от центра круга на $x = \dfrac{\left(R - \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right)d^2}{\pi R^2 - d^2}$.

395. Смещён вправо от центра шара на $x = \dfrac{dr^3}{R^3 - r^3}$.



396. См. рисунок.
397. Ответ содержится в подсказке.
398. Ответ содержится в подсказке.

399. $\upsilon = \dfrac{V}{St} = 3{,}33$ м/с.

400. $d_1 = d\sqrt{\dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}} \approx 1{,}1$ см.

401. Нет.

402. Все манометры показывают одинаковое давление.

403. $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} = 4$ м/с.

404. Ответ содержится в подсказке.

405. $V = \sqrt{2gh}St = 0{,}0144$ $м^3$.

406. $\upsilon = \sqrt{2gh}$.

407. $\upsilon = \sqrt{2gh} = 28{,}3$ м/с. В приближении идеальной жидкости. Реально это число завышенное. Для более точного расчёта нужно учитывать вязкость.

408. Ответ содержится в подсказке.

409. $\upsilon \approx \sqrt{\dfrac{2mg}{\rho_2 \pi \left(\dfrac{3}{4\pi}\dfrac{m}{\rho_1}\right)^{\frac{2}{3}}}} = 7$ м/с.

410. Вследствие эффекта Магнуса.

411. $h = \dfrac{aL}{g}$.

412. $\alpha = arctg\,\dfrac{a}{g}$.

413. $H = h\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2L}{h}}\right)$.

414. Ответ содержится в подсказке.